

ки, в которой сходятся три пунктира и которой сопоставляется величина

$$4\pi i \frac{\partial D^{-1}}{\partial k^\mu} = 2ik_\mu \equiv v_\mu. \tag{108,12}$$

Теперь можно дифференцировать любой график, добавляя на зависящие от k линии вершины v_μ или γ_μ и вычисляя далее по общим правилам. Суммируя эти высшие поправки, получаем

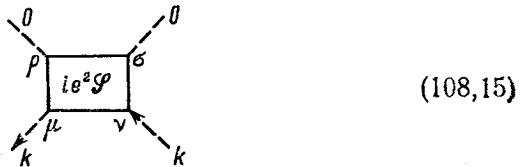
$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathcal{P}_{\mu\nu}}{\partial k^\lambda} = \mathcal{Y}_{\mu\lambda\nu}, \tag{108,13}$$

где $ie\mathcal{Y}_{\mu\lambda\nu}$ — сумма внутренних частей всех полученных указанным способом «фотонных треххвосток».

Для дальнейшего нам понадобится еще и вторая производная поляризационного оператора. Аналогичным образом дифференцируя еще раз равенство (108,13), имеем

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 \mathcal{P}_{\mu\nu}}{\partial k^\rho \partial k^\sigma} = \mathcal{G}_{\mu\rho\sigma\nu} + \mathcal{G}_{\mu\sigma\rho\nu}, \tag{108,14}$$

где $ie^2\mathcal{G}$ — сумма внутренних частей всех «фотонных четыреххвосток» вида



(разумеется, с включением и графиков с фиктивными трехфотонными вершинами (108,12)).

§ 109. Электронный пропагатор во внешнем поле

Если система находится в заданном внешнем поле $A^{(e)}(x)$, то точный электронный пропагатор определяется той же формулой (105,1), но в гамильтониан $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, осуществляющий преобразование к гейзенберговскому представлению операторов, входит также и взаимодействие электронов с внешним полем:

$$\hat{V} = e \int \hat{A}_\mu \hat{j}^\mu d^3x + e \int A_\mu^{(e)} \hat{j}^\mu d^3x. \tag{109,1}$$

Поскольку внешнее поле нарушает однородность пространства и времени, то пропагатор $\mathcal{G}(x, x')$ будет зависеть теперь уже от обоих аргументов x и x' в отдельности, а не только от их разности $x - x'$.

Если перейти обычным образом к представлению взаимодействия, то получится обычная диаграммная техника, в которой наряду с виртуальными фотонными линиями будут фигурировать также и линии внешнего поля. Такая техника, однако, неудобна в тех случаях, когда внешнее поле нельзя рассматривать как малое возмущение, прежде всего — когда частицы в поле могут находиться в связанных состояниях. Между тем электронный пропагатор во внешнем поле необходим в первую очередь как раз для изучения свойств связанных состояний, в частности для определения уровней энергии с учетом радиационных поправок. Для построения такого пропагатора следует исходить из представления операторов, в котором внешнее поле учитывается точно, уже в нулевом приближении по электрон-фотонному взаимодействию (W. H. Furry, 1951).

В дальнейшем мы будем предполагать внешнее поле стационарным, т. е. не зависящим от времени.

Требуемое представление ψ -операторов дается формулами (32,9) вторичного квантования во внешнем поле:

$$\hat{\psi}^{(e)}(t, \mathbf{r}) = \sum_n \{ \hat{a}_n \psi_n^{(+)}(\mathbf{r}) \exp(-ie_n^{(+)}t) + \hat{b}_n^+ \psi_n^{(-)}(\mathbf{r}) \exp(ie_n^{(-)}t) \}, \quad (109,2)$$

$$\hat{\bar{\psi}}^{(e)}(t, \mathbf{r}) = \sum_n \{ \hat{a}_n^+ \bar{\psi}_n^{(+)}(\mathbf{r}) \exp(ie_n^{(+)}t) + \hat{b}_n \bar{\psi}_n^{(-)}(\mathbf{r}) \exp(-ie_n^{(-)}t) \},$$

где $\psi_n^{(\pm)}(\mathbf{r})$ и $\varepsilon_n^{(\pm)}$ — волновые функции и уровни энергии соответственно электрона и позитрона, являющиеся решениями «одночастичной» задачи — уравнения Дирака для частицы в поле. Легко понять, что операторы (109,2) являются ψ -операторами в некотором представлении (*представлении Фарри*), как бы промежуточном между гейзенберговским и представлением взаимодействия. Их можно записать в виде

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^{(e)}(t, \mathbf{r}) &= \exp(i\hat{H}_1 t) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \exp(-i\hat{H}_1 t), \\ \hat{\bar{\psi}}^{(e)}(t, \mathbf{r}) &= \exp(i\hat{H}_1 t) \hat{\bar{\psi}}(\mathbf{r}) \exp(-i\hat{H}_1 t), \end{aligned} \quad (109,3)$$

где

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_0 + e \int A_\mu^{(e)}(x) \hat{j}^\mu(x) d^3x.$$

Оператор же электромагнитного поля A_μ , разумеется, коммутирует со вторым членом в \hat{H}_1 , и потому для него представление Фарри совпадает с представлением взаимодействия.

Электронный пропагатор нулевого приближения в новом представлении определяется как

$$G_{ik}^{(e)}(x, x') = -i \langle 0 | T \psi_i^{(e)}(x) \bar{\psi}_k^{(e)}(x') | 0 \rangle. \quad (109,4)$$

Оператор $\hat{\psi}^{(e)}(t, \mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Дирака во внешнем поле

$$[\gamma\hat{p} - e\gamma A^{(e)}(x) - m]\bar{\psi}^{(e)}(t, \mathbf{r}) = 0, \quad (109,5)$$

а функция $G^{(e)}$ — соответственно уравнению

$$[\gamma\hat{p} - e\gamma A^{(e)}(x) - m]G^{(e)}(x, x') = \delta^{(4)}(x - x') \quad (109,6)$$

(ср. вывод (107,5)).

Диаграммная техника, выражающая точный пропагатор \mathcal{G} , в виде ряда по e^2 , строится путем перехода от гейзенберговского представления к представлению Фарри — в точности так, как мы производили ранее переход к представлению взаимодействия. Мы получим в результате диаграммы того же вида, причем сплошным линиям будут соответствовать теперь множители $iG^{(e)}$ (вместо iG).

Незначительное отличие в правилах записи аналитических выражений диаграмм возникает лишь в связи с тем, что в координатном представлении $G^{(e)}$ — функция не только от разности $x - x'$. В постоянном внешнем поле, однако, сохраняется однородность времени, и потому моменты t и t' по-прежнему будут входить лишь в виде разности $t - t' \equiv \tau$, так что

$$G^{(e)} = G^{(e)}(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

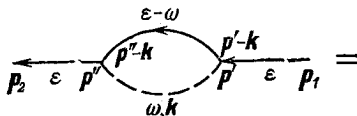
Переход к импульсному представлению осуществляется разложением Фурье по каждому из аргументов функции:

$$G^{(e)}(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \iiint e^{i(\mathbf{p}_2\mathbf{r} - \mathbf{p}_1\mathbf{r}' - \varepsilon\tau)} G(\varepsilon, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) \frac{d\varepsilon}{2\pi} \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3}. \quad (109,7)$$

Каждой линии, которой отвечает множитель $iG^{(e)}(\varepsilon, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)$, должно приписываться теперь одно значение виртуальной энергии ε , но два значения импульса — начальный \mathbf{p}_1 и конечный \mathbf{p}_2 :

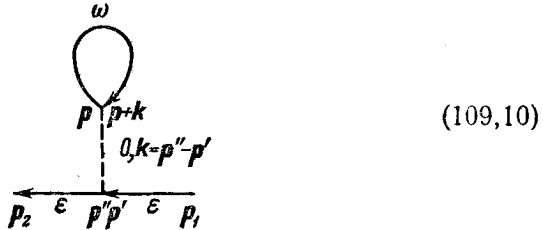
$$iG^{(e)}(\varepsilon, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) = \overleftarrow{\varepsilon, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}. \quad (109,8)$$

В результате получается правило записи аналитических выражений диаграмм, в которых обычным образом производятся интегрирования по $d\varepsilon/2\pi$, а по $d^3p_1/(2\pi)^3$ и $d^3p_2/(2\pi)^3$ интегрирования производятся независимо, с учетом сохранения импульса в каждой вершине. Например,



$$= e^2 \iiint G^{(e)}(\varepsilon, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'') \gamma^\mu G^{(e)}(\varepsilon - \omega, \mathbf{p}'' - \mathbf{k}, \mathbf{p}' - \mathbf{k}) \times \\ \times \gamma^\nu G^{(e)}(\varepsilon, \mathbf{p}', \mathbf{p}_1) D_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{k}) \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{d^3p''}{(2\pi)^3}. \quad (109,9)$$

Важно отметить, что в излагаемой технике необходимо учитывать также и диаграммы с «замкнутыми на себя» электронными линиями, которые в обычной технике отбрасываются как связанные с «вакуумным током». При наличии внешнего поля этот ток уже не должен обращаться в нуль в связи с вызываемой полем «поляризацией вакуума». Так, в диаграмме



верхней петле отвечает множитель

$$i \iint G^{(e)}(\omega, p+k, p) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi}. \tag{109,11}$$

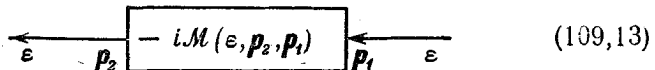
Здесь, однако, надо еще уточнить смысл, придаваемый интегралу по ω . Дело в том, что интегрирование компоненты Фурье функции $G^{(e)}(\tau)$ по ω сводится к взятию значения этой функции при $\tau=0$; но функция $G^{(e)}(\tau)$ разрывна в этой точке, так что надо указать, какое именно из ее двух предельных значений должно быть взято. Для выяснения этого вопроса достаточно заметить, что интеграл (109,11) происходит от свертывания ψ -операторов, стоящих в одном и том же операторе тока:

$$\hat{j}^\mu = \hat{\psi}^{(e)}(t, \mathbf{r}) \gamma^\mu \hat{\psi}^{(e)}(t, \mathbf{r}),$$

где $\hat{\psi}^{(e)}$ стоит слева от $\hat{\psi}^{(e)}$. Согласно определению пропагатора (109,4) такой порядок множителей при $t=t'$ получится, если понимать t' как $t' = t + 0$, т. е. предельное значение функции $G^{(e)}(t-t')$ — как предел при $t-t' \rightarrow -0$. Иначе можно сказать, что интеграл по $d\omega/2\pi$ в (109,11) надо понимать как

$$\int \dots e^{-i\omega\tau} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad \tau \rightarrow -0. \tag{109,12}$$

Массовый оператор во внешнем поле определяется так же, как в § 105: $-iM$ есть сумма всех компактных собственно-энергетических блоков. Он является теперь функцией энергии ε и импульсов \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 на тех концах внешних линий, которыми они соответственно входят и выходят из блока:



Поступая в точности так, как при выводе (105,6), получим уравнение

$$\mathcal{G}(\varepsilon, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) - G^{(e)}(\varepsilon, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) = \\ = \iint G^{(e)}(\varepsilon, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'') \mathcal{M}(\varepsilon, \mathbf{p}'', \mathbf{p}') \mathcal{G}(\varepsilon, \mathbf{p}', \mathbf{p}_1) \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p''}{(2\pi)^3}. \quad (109,14)$$

Более естественный вид этому уравнению можно придать, если вернуться к координатному представлению по пространственным переменным, введя функцию

$$\mathcal{G}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \iint \mathcal{G}(\varepsilon, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) e^{i(\mathbf{p}_2 \mathbf{r} - \mathbf{p}_1 \mathbf{r}')} \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^6}, \quad (109,15)$$

и аналогично для других величин. Произведя в (109,14) обратное преобразование Фурье, получим

$$\mathcal{G}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}') - G^{(e)}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \\ = \iint G^{(e)}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \mathcal{M}(\varepsilon, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \mathcal{G}(\varepsilon, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}') d^3 x_1 d^3 x_2.$$

Применим теперь к обеим сторонам равенства оператор

$$\gamma^0 \varepsilon - \hat{\mathbf{v}} \mathbf{r} - e \gamma^\mu A_\mu^{(e)}(x)$$

(ε — число, $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$ — оператор дифференцирования по координатам \mathbf{r}). При этом надо учесть, что согласно (109,6)

$$[\gamma^0 \varepsilon - \hat{\mathbf{v}} \mathbf{r} - e \gamma^\mu A_\mu^{(e)}(x)] G^{(e)}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (109,16)$$

В результате получим следующее уравнение:

$$[\gamma^0 \varepsilon - \hat{\mathbf{v}} \mathbf{r} - e \gamma^\mu A_\mu^{(e)}(x)] \mathcal{G}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}') - \int \mathcal{M}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \mathcal{G}(\varepsilon, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}') d^3 x_1 = \\ = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (109,17)$$

Особая ценность функции $\mathcal{G}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ состоит в том, что ее полюсы определяют уровни энергии электрона во внешнем поле.

Покажем это сначала для приближенной функции $G^{(e)}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Подставив операторы (109,2) в определение пропагатора (109,4), получим (в точности аналогично формулам (75,12) для пропагатора свободных частиц)

$$G_{ik}^{(e)}(t - t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} -i \sum_n \psi_{ni}^{(+)}(\mathbf{r}) \bar{\psi}_{nk}^{(+)}(\mathbf{r}') \exp\{-i\varepsilon_n^{(+)}(t - t')\}, & t > t', \\ i \sum_n \psi_{ni}^{(-)}(\mathbf{r}) \bar{\psi}_{nk}^{(-)}(\mathbf{r}') \exp\{i\varepsilon_n^{(-)}(t - t')\}, & t < t' \end{cases} \quad (109,18)$$

и после перехода к компонентам Фурье по времени

$$G_{ik}^{(e)}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_n \left\{ \frac{\Psi_{ni}^{(+)}(\mathbf{r}) \bar{\Psi}_{nk}^{(+)}(\mathbf{r}')}{\varepsilon - e_n^{(+)} + i0} + \frac{\Psi_{ni}^{(-)}(\mathbf{r}) \bar{\Psi}_{nk}^{(-)}(\mathbf{r}')}{\varepsilon + e_n^{(-)} - i0} \right\}. \quad (109,19)$$

Мы видим, что $G^{(e)}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ как аналитическая функция ε имеет на положительной вещественной полуоси полюсы, совпадающие с уровнями энергии электрона, а полюсы на отрицательной полуоси совпадают с уровнями энергии позитрона. Значения $e_n^{(\pm)} > m$ образуют непрерывный спектр¹⁾, и соответствующие полюсы сливаются в два разреза плоскости ε : от $-\infty$ до $-m$ и от m до $+\infty$. На отрезке $|\varepsilon| < m$ лежат полюсы, определяющие дискретные уровни энергии.

Для точного пропагатора $\mathcal{G}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ можно получить аналогичное разложение, выразив его через матричные элементы шредингеровских операторов, с которыми матричные элементы гейзенберговских ψ -операторов связаны равенствами

$$\langle m | \psi(t, \mathbf{r}) | n \rangle = \langle m | \psi(\mathbf{r}) | n \rangle \exp\{-i(E_n - E_m)t\}. \quad (109,20)$$

Здесь E_n — точные (т. е. со всеми радиационными поправками) уровни энергии системы во внешнем поле. Оператор $\hat{\psi}$ увеличивает, а оператор $\bar{\psi}$ уменьшает на 1 (т. е. на $+|e|$) заряд системы. Это значит, что в матричных элементах $\langle n | \psi | 0 \rangle$ и $\langle 0 | \bar{\psi} | n \rangle$ состояния $|n\rangle$ должны соответствовать равному $+1$ заряду системы, т. е. могут содержать, помимо одного позитрона, лишь некоторое число электрон-позитронных пар и фотонов; энергии этих состояний обозначим $E_n^{(-)}$. Аналогичным образом в матричных элементах $\langle 0 | \psi | n \rangle$ и $\langle n | \bar{\psi} | 0 \rangle$ состояния $|n\rangle$ содержат один электрон и некоторое число пар и фотонов (энергия $E_n^{(+)}$). Вместо (109,18) получим теперь

$$\mathcal{G}_{ik}(t - t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') =$$

$$= \begin{cases} -i \sum_n \langle 0 | \psi_i(\mathbf{r}) | n \rangle \langle n | \bar{\psi}_k(\mathbf{r}') | 0 \rangle \exp\{-iE_n^{(+)}(t - t')\}, & t > t', \\ i \sum_n \langle 0 | \bar{\psi}_k(\mathbf{r}') | n \rangle \langle n | \psi_i(\mathbf{r}) | 0 \rangle \exp\{iE_n^{(-)}(t - t')\}, & t < t', \end{cases} \quad (109,21)$$

и отсюда

$$\mathcal{G}_{ik}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_n \left\{ \frac{\langle 0 | \psi_i(\mathbf{r}) | n \rangle \langle n | \bar{\psi}_k(\mathbf{r}') | 0 \rangle}{\varepsilon - E_n^{(+)} + i0} + \frac{\langle 0 | \bar{\psi}_k(\mathbf{r}') | n \rangle \langle n | \psi_i(\mathbf{r}) | 0 \rangle}{\varepsilon + E_n^{(-)} - i0} \right\}. \quad (109,22)$$

¹⁾ Предполагается, что внешнее поле исчезает на бесконечности.

Пусть ϵ близко к какому-либо из дискретных уровней энергии $E_n^{(+)}$ (или к одному из $-E_n^{(-)}$). Тогда из всей суммы в (109,22) можно оставить лишь один соответствующий полюсный член. Подставив его затем в (109,17), мы увидим, что множители, зависящие от второго аргумента \mathbf{r}' (при $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$), из уравнения выпадают. В результате мы получим однородное интегродифференциальное уравнение для функции $\langle 0 | \psi(\mathbf{r}) | n \rangle$ (или $\langle n | \psi(\mathbf{r}) | 0 \rangle$), которую мы обозначим для краткости $\Psi_n(\mathbf{r})^1$). Опуская индекс n , имеем

$$[\gamma^0 \epsilon + i\gamma \nabla - e\gamma A^{(e)}(\mathbf{r})]_{ik} \Psi_k(\mathbf{r}) - \int \mathcal{M}_{ik}(\epsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Psi_k(\mathbf{r}_1) d^3x_1 = 0 \quad (109,23)$$

(*J. Schwinger*, 1951). Дискретные уровни энергии E_n выступают теперь как собственные значения этого уравнения. Тем самым уравнение (109,23) становится основой регулярной процедуры для определения этих уровней.

Выразим, например, из (109,23) поправку первого порядка по \mathcal{M} к дискретному уровню энергии электрона ϵ_n , полученному в результате решения уравнения Дирака

$$[\gamma^0 \epsilon_n + i\gamma \nabla - e\gamma A^{(e)}(\mathbf{r})] \psi_n(\mathbf{r}) = 0; \quad (109,24)$$

волновая функция $\psi_n(\mathbf{r})$ пусть нормирована условием

$$\int \psi_n^* \psi_n d^3x = 1. \quad (109,25)$$

Собственную функцию уравнения (109,23) запишем в виде

$$\Psi_n(\mathbf{r}) = \psi_n(\mathbf{r}) + \psi_n^{(1)}(\mathbf{r}), \quad (109,26)$$

где $\psi_n^{(1)}$ — поправка к ψ_n . Подставив (109,26) в уравнение (109,23), умножив его слева на $\bar{\psi}_n(\mathbf{r})$ и проинтегрировав по (d^3x^2), получим искомое выражение

$$E_n - \epsilon_n \approx \int \bar{\psi}_n(\mathbf{r}) \mathcal{M}_{ik}(\epsilon_n, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \psi_n(\mathbf{r}_1) d^3x d^3x_1. \quad (109,27)$$

¹⁾ В пренебрежении радиационными поправками $\Psi_n(\mathbf{r})$ совпадают (для состояний с одним электроном или позитроном) с волновыми функциями $\psi_n^{(+)}$ или $\psi_n^{(-)}$ — решениями уравнения Дирака.

²⁾ При интегрировании надо использовать самосопряженность дифференциального оператора уравнения (109,24) с целью перебросить его действие с $\psi_n^{(1)}$ на $\bar{\psi}_n$.