

### § 110. Физические условия перенормировки

Излагавшаяся до сих пор в этой главе теория носила в значительной степени формальный характер. Мы оперировали со всеми величинами так, как если бы они были конечными, и намеренно не обращали внимания на встречающиеся в теории бесконечности. Между тем при фактическом вычислении функций  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{S}$ ,  $\Gamma$  по теории возмущений встречаются расходящиеся интегралы, которым нельзя, без привлечения дополнительных соображений, приписать какого-либо определенного значения. В возникновении таких расходимостей проявляется логическое несовершенство излагаемой квантовой электродинамики. Мы увидим, однако, что в этой теории можно установить определенные предписания, позволяющие однозначным образом производить «вычитание бесконечностей» и в результате получать конечные значения для всех величин, имеющих непосредственный физический смысл. В основе этих предписаний лежат очевидные физические требования, сводящиеся к тому, чтобы масса фотона была равна нулю, а заряд и масса электрона были равны их наблюдаемым значениям.

Начнем с выяснения условий, налагаемых на фотонный пропагатор.

Рассмотрим процесс рассеяния, который может происходить через одночастичные промежуточные состояния с одним виртуальным фотоном. Амплитуда такого процесса должна иметь полюс, когда квадрат суммарного 4-импульса начальных частиц  $P$  совпадает с квадратом массы реального фотона, т. е.  $P^2 = 0$ ; мы видели в § 79, что это требование следует из общего условия унитарности. Полюсный член в амплитуде возникает из диаграммы вида (79,1):



$$(110,1)$$

причем с учетом радиационных поправок обе части диаграммы должны быть соединены жирной пунктирной линией (точный фотонный пропагатор). Это значит, что функция  $\mathcal{D}(k^2)$  должна иметь полюс при  $k^2 = 0$ , т. е. должно быть

$$\mathcal{D} \rightarrow \frac{4\pi Z}{k^2} \quad \text{при} \quad k^2 \rightarrow 0, \quad (110,2)$$

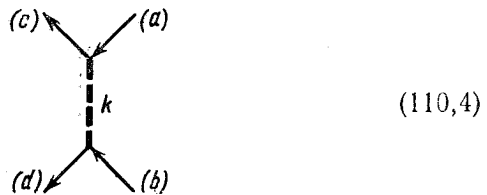
где  $Z$  — постоянная. Для поляризационного оператора же  $\mathcal{P}(k^2)$  отсюда получается согласно (103,21) условие

$$\mathcal{P}(0) = 0. \quad (110,3)$$

При этом коэффициент в (110,2)

$$\frac{1}{Z} = 1 - \frac{\mathcal{P}(k^2)}{k^2} \Big|_{k^2 \rightarrow 0}.$$

Дальнейшие ограничения на функцию  $\mathcal{P}(k^2)$  можно получить из анализа физического определения электрического заряда частицы. Оно состоит в том, что две классические (т. е. сколь угодно тяжелые) частицы, покоящиеся на больших расстояниях друг от друга, должны взаимодействовать по закону Кулона:  $U = e^2/r$  (имеются в виду расстояния  $r \gg 1/m$ ,  $m$  — масса электрона). С другой стороны, это взаимодействие выражается диаграммой



где верхние и нижние линии отвечают классическим частицам. Фотонные собственно-энергетические поправки учтены на линии виртуального фотона. Всякие же другие поправки, затрагивающие линии тяжелых частиц, привели бы к обращению диаграммы в нуль. Действительно, добавление каких-либо еще внутренних линий в диаграмме (110,4) (например, соединение линий  $a$  и  $c$  или  $a$  и  $b$  фотонной линией) приводит к появлению на диаграмме линий виртуальных тяжелых частиц, которым соответствуют соответствующие пропагаторы. Но пропагатор частицы содержит ее массу  $M$  в знаменателе и обращается в нуль при  $M \rightarrow \infty$ .

Из вида диаграммы (110,4) ясно (ср. § 83), что множитель  $e^2 \mathcal{D}(k^2)$  в ней должен представлять собой (с точностью до знака) фурье-образ потенциала взаимодействия частиц. Статичность взаимодействия означает, что частоты виртуальных фотонов  $\omega = 0$ , а большим расстояниям отвечают малые волновые векторы  $k$ . Фурье-образ кулонова потенциала есть  $4\pi e^2/k^2$ . Наконец, поскольку функция  $\mathcal{D}$  зависит только от квадрата  $k^2 = \omega^2 - k^2$ , то мы приходим к условию

$$\mathcal{D} \rightarrow 4\pi/k^2, \quad k^2 \rightarrow 0, \quad (110,5)$$

т. е. коэффициент в (110,2) должен быть  $Z = 1$  (знак в условии (110,5) очевиден:  $\mathcal{D}(k^2)$  стремится к пропагатору свободных фотонов  $D(k^2)$ ). Для поляризационного оператора  $\mathcal{P}(k^2)$  это значит, что должно быть

$$\mathcal{P}(k^2)/k^2 \rightarrow 0, \quad k^2 \rightarrow 0. \quad (110,6)$$

Помимо известного уже нам условия (110,3), отсюда следует, что должно быть также и

$$\mathcal{P}'(0) = 0. \quad (110,7)$$

В § 103 было отмечено, что эффективной внешней линии реального фотона отвечает в диаграмме множитель (103,15), или, с учетом (103,16) и (103,20),

$$\left[1 + \frac{1}{4\pi} \mathcal{P}(0) \mathcal{D}(0)\right] e_{\mu}.$$

Мы видим теперь, что ввиду (110,5—6) поправочный член здесь обращается в нуль. Другими словами, мы приходим к важному результату: во внешних фотонных линиях вообще не надо учитывать радиационных поправок.

Таким образом, естественные физические требования приводят к установлению определенных (равных нулю) значений величин  $\mathcal{P}(0)$  и  $\mathcal{P}'(0)$ . Между тем вычисление этих величин по диаграммам теории возмущений привело бы для них к расходящимся интегралам. Мы видим, что способ устранения этих бесконечностей состоит в приписывании расходящимся выражениям наперед заданных значений, устанавливаемых физическими требованиями. О такой процедуре говорят как о *перенормировке* соответствующих величин<sup>1)</sup>.

Способ проведения этой операции можно сформулировать и в несколько иной форме. Так, для перенормировки заряда частицы вводят нефизический «затравочный» заряд  $e_c$  как параметр, который входит в выражение исходного оператора электромагнитного взаимодействия, фигурирующего в формальной теории возмущений. После этого условие перенормировки формулируется как требование  $e_c^2 \mathcal{D}(k^2) \rightarrow 4\pi e^2/k^2$  (при  $k^2 \rightarrow 0$ ), где  $e$  — истинный, физический заряд частицы. Отсюда находим связь  $e_c^2 Z = e^2$ , и с ее помощью нефизическая величина  $e_c$  исключается из формул, определяющих наблюдаемые эффекты. Потребовав же сразу  $Z = 1$ , мы тем самым произведем перенормировку как бы «на ходу» и избавимся от необходимости введения фиктивных величин даже в промежуточных выкладках.

Перейдем к выяснению условий перенормировки электронного пропагатора. Для этого рассмотрим процесс рассеяния, который может проходить через одночастичное промежуточное состояние с одним виртуальным электроном. Амплитуда такого процесса должна иметь полюс, когда квадрат суммарного 4-им-

<sup>1)</sup> Идея такого подхода была высказана впервые Крамерсом (H. Kramers, 1947). Систематическое же использование метода перенормировок в квантовой электродинамике осуществлено в работах Дайсона, Томонаги (S. Tomonaga), Фейнмана и Швингера.

пульса начальных частиц  $P_i$  совпадает с квадратом массы реального электрона:  $P_i^2 = m^2$ . Полюсной член в амплитуде возникает из диаграммы вида

$$P_f \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram with two vertices and thick propagator} \\ p = P_i = P_f \end{array} \right\} P_i \quad (110,8)$$

где, с учетом радиационных поправок, жирная линия — точный электронный пропагатор. Это значит, что функция  $\mathcal{G}(p)$  должна иметь полюс при  $p^2 = m^2$ , т. е. должна иметь предельную форму

$$\mathcal{G}(p) \approx Z_1 \frac{\gamma p + m}{p^2 - m^2 + i0} + g(p), \quad p^2 \rightarrow m^2, \quad (110,9)$$

где  $Z_1$  — скалярная постоянная, а  $g(p)$  остается при  $p^2 \rightarrow m^2$  конечной. Матричная структура полюсного члена в (110,9) (пропорциональность  $\gamma p + m$ ) является следствием того же условия унитарности, из которого возникает и само требование наличия полюса. Покажем это, одновременно выяснив важный вопрос об условиях перенормировки внешних электронных линий.

Если  $\mathcal{G}(p)$  имеет предельный вид (110,9), то обратная матрица

$$\mathcal{G}^{-1}(p) \approx \frac{1}{Z_1} (\gamma p - m) - (\gamma p - m) g (\gamma p - m), \quad p^2 \rightarrow m^2. \quad (110,10)$$

Массовый же оператор

$$\mathcal{M} = G^{-1} - \mathcal{G}^{-1} \approx \left(1 - \frac{1}{Z_1}\right) (\gamma p - m) + (\gamma p - m) g (\gamma p - m), \quad (110,11)$$

$$p^2 \rightarrow m^2.$$

Эффективной внешней (скажем, входящей) электронной линии отвечает в диаграмме множитель (ср. (103,15))

$$\mathcal{U}(p) = u(p) + \mathcal{G}(p) \mathcal{M}(p) u(p), \quad (110,12)$$

где  $u(p)$  — обычная амплитуда волновой функции электрона, удовлетворяющая уравнению Дирака  $(\gamma p - m)u = 0$ . В силу требований релятивистской инвариантности ( $\mathcal{U}$ , как и  $u$ , — биспинор) предельное значение  $\mathcal{U}(p)$  при  $p^2 \rightarrow m^2$  может отличаться от  $u(p)$  лишь постоянным скалярным множителем:

$$\mathcal{U}(p) = Z' u(p). \quad (110,13)$$

Этот множитель  $Z'$  определенным образом связан с множителем  $Z_1$ , но найти эту связь просто подстановкой (110,10—11) в (110,12) нельзя ввиду возникающей неопределенности: ре-

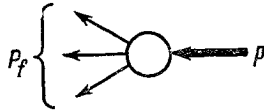
зультат будет зависеть от порядка, в котором совершается предельный переход в различных множителях в (110,12).

Можно, однако, обойтись без выяснения вопроса о правильном способе предельного перехода, обратившись вместо этого к условию унитарности в применении к реакции, изображаемой диаграммой (110,8). Соотношение унитарности относится, вообще говоря, не к отдельным диаграммам, а к амплитудам процессов в целом. Но при  $p^2 \rightarrow m^2$  полюсная диаграмма (110,8) дает основной вклад в соответствующую амплитуду  $M_{fi}$ , так что другие диаграммы, относящиеся к той же реакции, можно не рассматривать.

В силу требований унитарности, как это было показано в § 79, одночастичное промежуточное состояние приводит к появлению в амплитуде реакции мнимой части с  $\delta$ -функциональным членом

$$i\pi\delta(p^2 - m^2) \sum_{\text{поляризация}} M_{fn} M_{in}^*, \quad (110,14)$$

где в данном случае индекс  $n$  относится к состоянию с одним реальным электроном, а суммирование производится по его поляризациям (во избежание лишних усложнений считаем, как и в § 79, что произведена симметризация обеих сторон соотношения унитарности по спиральностям начальных и конечных частиц; тогда  $M_{fi} = M_{if}$ ). Амплитуда  $M_{fn}$  отвечает процессу, изображаемому диаграммой



и имеет вид

$$M_{fn} = (M'_{fn} \mathcal{U}) = Z' (M'_{fn} u),$$

где  $M'_{fn}$  — множитель с одним свободным биспинорным индексом<sup>1)</sup>. Аналогичным образом амплитуда  $M_{in}^*$  имеет структуру вида

$$M_{in}^* = (\bar{u} M'^*_{in}) = Z' (\bar{u} M'^*_{in}).$$

Суммирование по поляризациям электрона заменяет произведение  $(M'_{fn} u) (\bar{u} M'^*_{in})$  на  $M'_{fn} (\gamma p + m) M'^*_{in}$ , так что член (110,14)

<sup>1)</sup> Здесь необходимо некоторое уточнение. Электрон как стабильная частица не может в действительности превратиться в другую совокупность реальных частиц. Можно, однако, формально рассматривать в качестве последних некоторые воображаемые частицы с такими массами, которые бы допускали такое превращение. Получающееся соотношение надо понимать тогда в смысле аналитического продолжения к реальным значениям масс.

в амплитуде  $M_{fi}$  принимает вид

$$Z'^2 i \pi \delta(p^2 - m^2) \{M'_{fn}(\gamma p + m) M'^{*}_{in}\}.$$

По этому члену в мнимой части можно восстановить весь полюсной член в амплитуде рассеяния; согласно (79,5) находим

$$M_{fi} = - \frac{Z'^2 \{M'_{fn}(\gamma p + m) M'^{*}_{in}\}}{p^2 - m^2 + i0}, \quad p^2 \rightarrow m^2.$$

С другой стороны, вычисление этой же амплитуды непосредственно по диаграмме (110,8) дает

$$iM_{fi} = iM'_{fn} \cdot i\mathcal{G}(p) \cdot iM'^{*}_{in}.$$

Сравнение обеих формул подтверждает написанное выше предельное выражение для  $\mathcal{G}(p)$  (первый член в (110,9)), причем

$$Z' = \sqrt{Z_1}. \quad (110,15)$$

Покажем теперь, что после установления требуемого предельного вида электронного пропагатора уже нет необходимости в постановке каких-либо новых условий для вершинного оператора.

Рассмотрим диаграмму



описывающую рассеяние электрона во внешнем поле  $A^{(e)}(k)$  (в первом порядке по полю) с учетом всех радиационных поправок. В пределе  $k \rightarrow 0$ ,  $p_2 \rightarrow p_1 \equiv p$  собственно-энергетические поправки к линии внешнего поля исчезают (напомним, что эти поправки исчезают вообще при всяком  $k^2 = 0$ ). Тогда диаграмме будет соответствовать амплитуда

$$M_{fi} = - e \bar{\mathcal{U}}(p) \Gamma(p, p; 0) \mathcal{U}(p) \cdot A^{(e)}(k \rightarrow 0) \quad (110,17)$$

— произведение потенциала  $A^{(e)}$  на электронный ток перехода  $\bar{\mathcal{U}}\mathcal{U}$ . Но при  $k \rightarrow 0$  потенциал  $A^{(e)}(x)$  сводится к не зависящей от координат и времени постоянной. Такому потенциалу вообще не соответствует никакое физическое поле (частный случай калибровочной инвариантности), так что он не может вызвать

никакого изменения электронного тока. Другими словами, в рассматриваемом пределе ток перехода  $\bar{\mathcal{U}}\Gamma\mathcal{U}$  должен просто совпадать со свободным током  $\bar{u}u$ :

$$\bar{\mathcal{U}}(p)\Gamma^\mu(p, p; 0)\mathcal{U}(p) = Z_1\bar{u}(p)\Gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p)\gamma^\mu u(p). \quad (110,18)$$

Это требование есть, по существу, тоже выражение определения физического заряда электрона. Легко видеть, что оно автоматически выполняется вне зависимости от значения  $Z_1$ . Действительно, подставив  $\mathcal{G}^{-1}(p)$  из (110,10) в тождество Уорда (108,8), найдем

$$\Gamma^\mu(p, p; 0) = Z_1^{-1}\gamma^\mu - \gamma^\mu g(p)(\gamma p - m) - (\gamma p - m)g(p)\gamma^\mu,$$

и равенство (110,18) удовлетворяется в силу уравнений

$$(\gamma p - m)u = 0, \quad \bar{u}(\gamma p - m) = 0.$$

Мы видим, что при составлении амплитуды физического процесса «перенормировочная постоянная»  $Z_1$  вообще выпадает. Мало того, воспользовавшись неопределенностью, возникающей из-за расходимостей при вычислении  $\Gamma$ , можно просто потребовать, чтобы было

$$\bar{u}(p)\Gamma^\mu(p, p; 0)u(p) = \bar{u}(p)\gamma^\mu u(p), \quad p^2 = m^2, \quad (110,19)$$

т. е. положить  $Z_1 = 1$ .

Удобство такого определения состоит в том, что отпадает необходимость во введении поправок во внешние электронные линии: имеем просто

$$\mathcal{U}(p) = u(p).$$

В этом можно убедиться и непосредственно, заметив, что при  $Z_1 = 1$  массовый оператор (110,11)

$$\mathcal{M} = (\gamma p - m)g(\gamma p - m) \quad (110,20)$$

и второй член в (110,12) очевидным образом обращается в нуль. Таким образом, не будут требовать «перенормировки» внешние линии всех реальных частиц — как фотонов, так и электронов<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> При перенормировке фотонного пропагатора условие  $Z = 1$  возникало как необходимое физическое требование, а после этого исчезновение поправок к внешним фотонным линиям происходит уже автоматически. С формальной точки зрения, однако, ситуации для фотонных и электронных внешних линий аналогичны: при  $Z \neq 1$  волновая амплитуда  $e_\mu$  реального фотона с учетом поправок умножалась бы на  $\sqrt{Z}$ .