§ 111. Аналитические свойства фотонного пропагатора

Исследование аналитических свойств фотонного пропагатора удобно начать с изучения свойств функции $\Pi(k^2)$. Дело в том, что прямое использование для этой цели определения (103,1) затрудняется калибровочной неоднозначностью операторов $\hat{A}^\mu(x)$ и проистекающей отсюда неопределенностью их свойств.

Исходя из выражения собственно-энергетической функции фотона через матричные элементы калибровочно-инвариантного оператора тока в § 104 было получено интегральное представление функции $\Pi(k^2)$ (104,11). Обозначив переменную k^2 через t[1]), рассмотрим свойства функции $\Pi(t)$ в плоскости комплексного t.

Из интегрального представления

$$\Pi(t) = \int\limits_0^\infty \frac{\rho(t')\,dt'}{t - t' + i0} \tag{111,1}$$

видно, что на отрицательной вещественной полуоси функция $\Pi(t)$ вещественна, а во всей остальной плоскости удовлетворяет соотношению симметрии

$$\Pi(t^*) = \Pi^*(t). \tag{111,2}$$

Функция $\Pi(t)$ может иметь особенность лишь в особых точках функции $\rho(t)$. Последние лежат при значениях $t = k^2$, являющихся пороговыми для рождения виртуальным фотоном различных совокупностей реальных частиц. При этих значениях «вступают в игру» новые типы промежуточных состояний в сумме (104,9). Вклад от этих состояний равен нулю ниже порога и отличен от нуля выше порога, что и приводит к особенности функции в самой точке порога. Эти пороговые значения, разумеется, вещественны и неотрицательны[2]). Поэтому и особые точки функции $\Pi(t)$ лежат на положительной вещественной полуоси переменной t. Если провести разрез по этой полуоси, то функция $\Pi(t)$ будет аналитична во всей разрезанной таким образом плоскости.

Член $+i0$ в знаменателе подынтегрального выражения в (111,1) показывает, что полюс $t' = t$ должен обходиться снизу. Иными словами, под значением функции $\Pi(t)$ при вещественном t следует понимать ее значение на верхнем берегу разреза. Используя правило (75,18):

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mathrm{P}\,\frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x), \tag{111,3}$$

---

[1]) Не смешивать с обозначением времени!

[2]) Так, точка $k^2 = 0$ является порогом для рождения трех (или большего нечетного числа) реальных фотонов, точка $k^2 = 4m^2$ — порог для рождения электрон-позитронной пары и т. п.

находим, что для вещественных t

$$\operatorname{Im}\Pi(t) \equiv \operatorname{Im}\Pi(t+i0) = -\pi\rho(t). \tag{111,4}$$

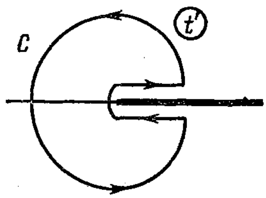
На нижнем же берегу разреза $\operatorname{Im}\Pi$ имеет обратный знак, а $\operatorname{Re}\Pi$ на обоих берегах одинаково. Поэтому скачок функции $\Pi(t)$ на разрезе

$$\Pi(t+i0) - \Pi(t-i0) = -2\pi i\rho(t). \tag{111,5}$$

Само интегральное представление (111,1) можно рассматривать в этом аспекте просто как формулу Коши для аналитической функции $\Pi(t)$. Действительно, применим формулу Коши

$$\Pi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\Pi(t')\,dt'}{t'-t} \tag{111,6}$$

к контуру



(111,7)

огибающему разрез. В предположении достаточно быстрого убывания $\Pi(t)$ на бесконечности, интеграл по большой окружности исчезает, а интегралы по берегам разреза дают следующую формулу (*дисперсионное соотношение*), определяющую функцию $\Pi(t)$ по ее мнимой части:

$$\Pi(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{Im}\Pi(t'+i0)}{t'-t}\,dt' = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{Im}\Pi(t')}{t'-t-i0}\,dt'. \tag{111,8}$$

Подставив сюда (111,4), получим (111,1)[1].

Аналитические свойства функций $\mathscr{P}(t)$ и $\mathscr{D}(t)$ совпадают со свойствами функции $\Pi(t)$, через которую они выражаются простыми формулами (104,2) и (103,21). Для $\mathscr{D}(t)$ имеем

$$\mathscr{D}(t) = \frac{4\pi}{t}\left(1 + \frac{\Pi(t)}{t}\right). \tag{111,9}$$

На вещественной полуоси ($t > 0$) согласно сказанному выше надо понимать t как $t + i0$. Мнимую часть $\mathscr{D}(t)$ можно вычис-

[1]) Дисперсионные соотношения были введены в квантовую теорию поля *Гелл-Маном, Гольдбергером* и *Тиррингом* (*M. Gell-Mann, M. L. Goldberger, W. E. Thirring*, 1954).

лить затем с помощью (111,3) и (111,4), причем надо учесть, что согласно (110,6) $\Pi(t)/t \to 0$ при $t \to 0$. Тогда найдем

$$\operatorname{Im}\mathcal{D}(t) = -4\pi^2\delta(t) + \frac{4\pi}{t^2}\operatorname{Im}\Pi(t) = -4\pi^2\delta(t) - \frac{4\pi^2}{t^2}\rho(t). \qquad (111,10)$$

Применив теперь к функции $\mathcal{D}(t)$ дисперсионное соотношение вида (111,8), получим для нее следующее интегральное представление:

$$\mathcal{D}(t) = \frac{4\pi}{t+i0} + 4\pi\int_0^\infty \frac{\rho(t')}{t'^2}\,\frac{dt'}{t-t'+i0}. \qquad (111,11)$$

Эту формулу называют *разложением Челлена — Лемана* (*G. Källen*, 1952; *H. Lehmann*, 1954).

Существует тесная связь между положением разреза для функции $\mathcal{D}(t)$ (а тем самым и ее мнимой частью на разрезе), с одной стороны, и условием унитарности для амплитуды процесса $a+b \to c+d$, изображаемого диаграммой (110,4), с другой стороны (эта реакция, конечно, чисто воображаемая; она не противоречит, однако, законам сохранения, и формальное условие унитарности для нее должно выполняться).

В начальном состоянии (i) этого процесса имеются две «классические» частицы a и b, а в конечном — две другие c и d. Условие унитарности (71,2)[1]:

$$T_{fi} - T^*_{if} = i(2\pi)^4 \sum_n T_{fn}T^*_{in}\delta^{(4)}(P_f - P_i); \qquad (111,12)$$

суммирование в правой стороне производится по всем физическим «промежуточным» состояниям n. В данном случае этими состояниями являются, очевидно, состояния систем реальных пар и фотонов, которые могут быть рождены виртуальным фотоном k, т. е. как раз те состояния, которые фигурируют в матричных элементах в определении функции $\rho(k^2)$ (104,9). Амплитуды M_{fi} и M^*_{if} содержат соответственно множители $\mathcal{D}(k^2)$ и $\mathcal{D}^*(k^2)$, а их разность — мнимую часть $\operatorname{Im}\mathcal{D}(k^2)$. Мы видим, таким образом, что уже известная нам (из (111,4)) связь между появлением у $\mathcal{D}$ мнимой части и существованием указанных промежуточных состояний является следствием необходимых требований унитарности.

Мы увидим в дальнейшем, что фактические вычисления по теории возмущений функции $\mathcal{D}(t)$ (или, что то же, функции $\mathcal{P}(t)$) удобно начать с вычисления мнимой части $\mathcal{P}$, в которой не возникает расходящихся выражений. Но если затем вычислять

---

[1]) Напомним, что амплитуды T_{fi} отличаются от амплитуд M_{fi} лишь множителями, — см. (64,10).

функцию $\mathscr{P}(t)$ по дисперсионной формуле вида (111,8), то интеграл окажется расходящимся и понадобится производить дополнительные операции вычитания с целью удовлетворить условиям $\mathscr{P}(0)=0$ и $\mathscr{P}'(0)=0$. Это вычитание можно, однако, произвести без явного оперирования с расходящимся интегралом. Для этого достаточно применить дисперсионное соотношение (111,8) не к самой функции $\mathscr{P}(t)$, а к функции $\mathscr{P}(t)/t^2$. Тогда $\mathscr{P}(t)$ представится в виде

$$\mathscr{P}(t)=\frac{t^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Im}\mathscr{P}(t')}{t'^2(t'-t-i0)}\,dt'. \qquad (111,13)$$

Этот интеграл уже сходится, а получаемая таким образом функция $\mathscr{P}(t)$ автоматически удовлетворяет требуемым условиям.

О соотношении вида (111,13) говорят как о дисперсионном соотношении «с двумя вычитаниями». Смысл использованного в нем перехода к функции $\mathscr{P}(t)/t^2$ становится особенно наглядным, если записать (111,13) в виде

$$\mathscr{P}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Im}\mathscr{P}(t')\,dt'}{t'-t-i0}-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Im}\mathscr{P}(t')}{t'}\,dt'-\frac{t}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Im}\mathscr{P}(t')}{t'^2}\,dt'.$$

Если обозначить первый («нерегуляризованный») интеграл как $\overline{\mathscr{P}}(t)$, то все выражение в правой стороне будет равно

$$\overline{\mathscr{P}}(t)-\overline{\mathscr{P}}(0)-t\overline{\mathscr{P}}'(0).$$

§ 112. Регуляризация интегралов Фейнмана

Рассмотренные в § 110 физические условия перенормировки позволяют, в принципе, получить однозначным образом конечное значение амплитуды всякого электродинамического процесса при ее вычислении в любом приближении теории возмущений.

Ознакомимся прежде всего с характером расходимостей, возникающих в интегралах, написанных непосредственно по диаграммам Фейнмана. Важные указания на этот предмет дает подсчет степеней виртуальных 4-импульсов, входящих в подынтегральные выражения для этих интегралов.

Рассмотрим диаграмму n-го порядка (т. е. содержащую n вершин), имеющую N_e электронных и N_γ фотонных внешних линий. Число N_e четно, и электронные линии образуют $N_e/2$ непрерывных последовательностей, каждая из которых начинается и заканчивается внешним концом. Число же внутренних электронных линий в каждой такой последовательности на единицу меньше числа вершин на ней; поэтому полное число внутренних