функцию $\mathscr{P}(t)$ по дисперсионной формуле вида (111,8), то интеграл окажется расходящимся и понадобится производить дополнительные операции вычитания с целью удовлетворить условиям $\mathscr{P}(0)=0$ и $\mathscr{P}'(0)=0$. Это вычитание можно, однако, произвести без явного оперирования с расходящимся интегралом. Для этого достаточно применить дисперсионное соотношение (111,8) не к самой функции $\mathscr{P}(t)$, а к функции $\mathscr{P}(t)/t^2$. Тогда $\mathscr{P}(t)$ представится в виде

$$\mathscr{P}(t)=\frac{t^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Im}\mathscr{P}(t')}{t'^2(t'-t-i0)}\,dt'. \tag{111,13}$$

Этот интеграл уже сходится, а получаемая таким образом функция $\mathscr{P}(t)$ автоматически удовлетворяет требуемым условиям.

О соотношении вида (111,13) говорят как о дисперсионном соотношении «с двумя вычитаниями». Смысл использованного в нем перехода к функции $\mathscr{P}(t)/t^2$ становится особенно наглядным, если записать (111,13) в виде

$$\mathscr{P}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Im}\mathscr{P}(t')\,dt'}{t'-t-i0}-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Im}\mathscr{P}(t')}{t'}\,dt'-\frac{t}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Im}\mathscr{P}(t')}{t'^2}\,dt'.$$

Если обозначить первый («нерегуляризованный») интеграл как $\overline{\mathscr{P}}(t)$, то все выражение в правой стороне будет равно

$$\overline{\mathscr{P}}(t)-\overline{\mathscr{P}}(0)-t\overline{\mathscr{P}}'(0).$$

§ 112. Регуляризация интегралов Фейнмана

Рассмотренные в § 110 физические условия перенормировки позволяют, в принципе, получить однозначным образом конечное значение амплитуды всякого электродинамического процесса при ее вычислении в любом приближении теории возмущений.

Ознакомимся прежде всего с характером расходимостей, возникающих в интегралах, написанных непосредственно по диаграммам Фейнмана. Важные указания на этот предмет дает подсчет степеней виртуальных 4-импульсов, входящих в подынтегральные выражения для этих интегралов.

Рассмотрим диаграмму n-го порядка (т. е. содержащую n вершин), имеющую N_e электронных и N_γ фотонных внешних линий. Число N_e четно, и электронные линии образуют $N_e/2$ непрерывных последовательностей, каждая из которых начинается и заканчивается внешним концом. Число же внутренних электронных линий в каждой такой последовательности на единицу меньше числа вершин на ней; поэтому полное число внутренних электронных линий в диаграмме равно

$$n - N_e/2.$$

В каждую вершину входит одна фотонная линия; в N_γ вершинах фотонная линия — внешняя, а в остальных $n - N_\gamma$ — внутренняя. Поскольку каждая внутренняя фотонная линия связывает две вершины, полное число таких линий равно

$$(n - N_\gamma)/2.$$

Каждой фотонной внутренней линии сопоставляется множитель $D(k)$, содержащий k в степени -2. Каждой же электронной внутренней линии сопоставляется множитель $G(p)$, содержащий p (при $p^2 \gg m^2$) в степени -1. Таким образом, суммарная степень 4-импульсов в знаменателе диаграммы равна

$$2n - N_e/2 - N_\gamma.$$

Число же интегрирований (по d^4p или d^4k) в диаграмме равно числу внутренних линий, за вычетом числа $n - 1$ налагаемых на виртуальные импульсы дополнительных условий (из n законов сохранения в вершинах один связывает импульсы внешних концов диаграммы). Учетверив, получим число интегрирований по всем компонентам 4-импульсов:

$$2(n - N_e - N_\gamma + 2).$$

Наконец, разность между числом интегрирований и степенью импульсов в знаменателе интегрируемого выражения (обозначим ее r) равна

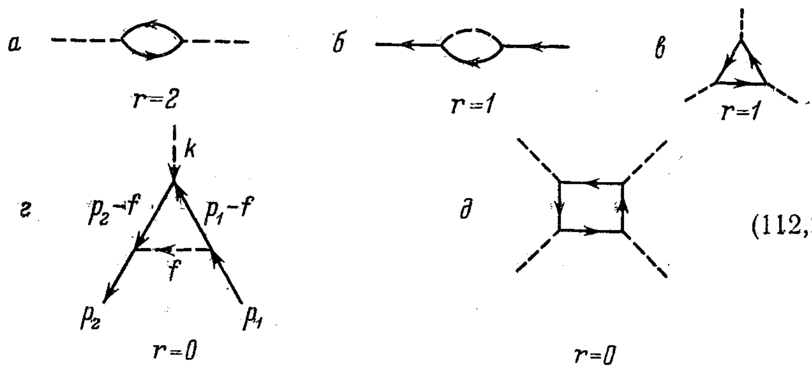
$$r = 4 - {}^3/_2 N_e - N_\gamma. \tag{112,1}$$

Отметим, что это число не зависит от порядка диаграммы n.

Условия $r < 0$ для диаграммы в целом, вообще говоря, недостаточно для сходимости интеграла; необходимо, чтобы были отрицательны аналогичные числа r' и для внутренних блоков, которые можно было бы выделить из диаграммы. Наличие блоков с $r' > 0$ привело бы к их расходимости, хотя остальные интегрирования в диаграмме и сходились бы при этом даже «с избытком». Условия $r < 0$, однако, достаточно для сходимости простейших диаграмм, в которых $n = N_e + N_\gamma$ и имеется всего одно интегрирование по d^4p.

Если же $r \geqslant 0$, то интеграл во всяком случае расходится. При этом степень расходимости — не менее чем r, если число r четно, и не менее чем $r - 1$, если r нечетно (уменьшение степени расходимости на 1 в последнем случае связано с обращением в нуль интеграла от произведений нечетного числа 4-векторов при интегрировании по всему 4-пространству). Степень расходимости может увеличиться при наличии внутренних блоков с $r' > 0$.

Отметим, что так как N_e и N_γ — целые положительные числа, из (112,1) видно, что существует лишь несколько пар значений этих чисел, при которых $r \geqslant 0$. Перечислим простейшие диаграммы каждого из таких типов, но сразу же исключим из них случаи $N_e = N_\gamma = 0$ (вакуумные петли) и $N_e = 0$, $N_\gamma = 1$ (среднее значение вакуумного тока), поскольку они не имеют физического смысла и соответствующие диаграммы должны просто отбрасываться, как уже было указано в § 103. Остальные случаи таковы:



(112,2)

В первом из этих случаев расходимость квадратичная, а во всех остальных ($r = 0$ или $r = 1$) — логарифмическая.

Диаграмма *г*) — первая поправка к вершинному оператору. Она должна удовлетворять условию (110,19), которое запишем здесь в виде

$$\bar{u}(p)\Lambda^\mu(p,\ p;\ 0)\,u(p) = 0, \quad p^2 = m^2, \tag{112,3}$$

где

$$\Lambda^\mu = \Gamma^\mu - \gamma^\mu. \tag{112,4}$$

Обозначим интеграл Фейнмана, записанный прямо по диаграмме, посредством $\bar{\Lambda}^\mu(p_2,\ p_1;\ k)$. Этот интеграл логарифмически расходится и сам по себе условию (112,3) не удовлетворяет. Мы, однако, получим величину, удовлетворяющую этому условию, образовав разность

$$\Lambda^\mu(p_2,\ p_1;\ k) = \bar{\Lambda}^\mu(p_2,\ p_1;\ k) - \bar{\Lambda}^\mu(p_1,\ p_1;\ 0)\,|_{p_1^2=m^2}. \tag{112,5}$$

Главный член расходимости в интеграле $\bar{\Lambda}^\mu(p_2, p_1;\ k)$ получится, если считать в подынтегральном выражении 4-импульс виртуального фотона f сколь угодно большой величиной. Он имеет вид [1])

$$-4\pi i e^2 \int \frac{\gamma^\nu(\gamma f)\,\gamma^\mu(\gamma f)\,\gamma_\nu}{f^2 f^2 f^2}\,\frac{d^4 f}{(2\pi)^4}$$

[1]) Полное выражение для интеграла записано в § 117 — см. (117,2).

и не зависит от значений 4-импульсов внешних линий. Поэтому в разности (112,5) расходимость сокращается и получается конечная величина. О такой операции устранения расходимости путем вычитаний говорят как о *регуляризации* интеграла.

Подчеркнем, что возможность регуляризации интеграла $\overline{\Lambda}^{\mu}(p_2, p_1; k)$ путем одного вычитания обеспечивается тем, что в данном случае расходимость — лишь логарифмическая, т. е. наименее сильная из всех возможных. Если бы в интеграле содержались расходимости различных порядков, то одно вычитание при $k=0$ могло бы оказаться недостаточным для устранения всех расходящихся членов.

После определения первой поправки в Γ^{μ} (первого члена разложения Λ^{μ}) первая поправка в электронном пропагаторе (диаграмма (112,2, *б*)) может быть вычислена по тождеству Уорда (108,8), которое можно записать также и в виде

$$\frac{\partial \mathcal{M}(p)}{\partial p_{\mu}} = -\Lambda^{\mu}(p, p; 0), \tag{112,6}$$

введя массовый оператор $\mathcal{M}$ вместо $\mathcal{G}$ и Λ^{μ} вместо Γ^{μ}. Это уравнение должно быть проинтегрировано с граничным условием

$$\bar{u}(p)\mathcal{M}(p)u(p) = 0, \qquad p^2 = m^2, \tag{112,7}$$

следующим из (110,20).

Наконец, для вычисления первого члена разложения поляризационного оператора обратимся к тождеству (108,14); после упрощения по двум парам индексов оно дает уравнение

$$\frac{3}{4\pi}\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial k_{\sigma}\,\partial k^{\sigma}} = 2\mathcal{S},$$

связывающее скалярные функции

$$\mathcal{P} = {}^1/_3\mathcal{P}^{\mu}_{\mu} \quad \text{и} \quad \mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mu\rho}{}^{\rho\mu}.$$

Обе эти функции зависят только от скалярной же переменной k^2, и поэтому находим

$$2k^2\mathcal{P}''(k^2) + \mathcal{P}'(k^2) = \frac{4\pi}{3}\mathcal{S}(k^2), \tag{112,8}$$

где штрихи означают дифференцирование по k^2. Ввиду условия $\mathcal{P}'(0) = 0$ из этого уравнения ясно, что должно быть и

$$\mathcal{S}(0) = 0. \tag{112,9}$$

В первом приближении теории возмущений $\mathcal{S}(k^2)$ определяется диаграммой (112,2, *д*) (с 4-импульсами концов k, k, 0, 0). Соответствующий интеграл Фейнмана (обозначим его $\overline{\mathcal{S}}(k^2)$) расходится логарифмически, и его регуляризация осуществляется одним вычитанием по условию (112,9):

$$\mathscr{P}(k^2) = \overline{\mathscr{P}}(k^2) - \overline{\mathscr{P}}(0).$$

После этого $\mathscr{P}(k^2)$ определяется решением уравнения (112,8) с граничными условиями $\mathscr{P}(0) = 0$, $\mathscr{P}'(0) = 0$.

В следующем приближении теории возмущений поправка к вершинному оператору $(\Lambda_\mu^{(2)})$ определяется диаграммами (106,10, *в—и*). Из них неприводимая (106,10, *г*) вычисляется такой же регуляризацией интегралов с помощью одного вычитания согласно (112,5), как и при вычислении поправки первого приближения $\Lambda_\mu^{(1)}$. Содержащиеся же в приводимых диаграммах внутренние собственно-энергетические и вершинные части более низкого порядка сразу заменяются известными уже (регуляризованными) величинами первого приближения $(\mathscr{P}^{(1)}, \mathscr{M}^{(1)}, \Lambda_\mu^{(1)})$, после чего получившиеся интегралы регуляризуются снова согласно (112,5)[1]). Поправки $\mathscr{P}^{(2)}$ и $\mathscr{M}^{(2)}$ могут быть затем вычислены с помощью уравнений (112,6) и (112,8).

Описанная систематическая процедура дает, в принципе, возможность получить конечные выражения для $\mathscr{P}$, $\mathscr{M}$ и Λ_μ в любом приближении теории возмущений. Тем самым становится возможным и вычисление амплитуд физических процессов рассеяния, описывающихся диаграммами, в которые блоки $\mathscr{P}$, $\mathscr{M}$, Λ_μ входят как составные части.

Мы видим, таким образом, что установленные выше (см. § 111) физические условия оказываются достаточными для однозначной регуляризации всех встречающихся в теории диаграмм Фейнмана. Это обстоятельство является отнюдь не тривиальным свойством квантовой электродинамики и носит название *перенормируемости*[2]).

Для фактического вычисления радиационных поправок описанная выше процедура может, однако, оказаться не наиболее простым и рациональным путем. В следующей главе мы увидим, в частности, что целесообразный путь может начинаться с вычисления мнимой части соответствующих величин; эти части даются интегралами, не содержащими расходимостей. Вся величина в целом определяется затем путем аналитического продолжения с помощью дисперсионных соотношений. Тем самым оказывается возможным избежать громоздких вычислений, требуемых для прямой регуляризации путем вычитаний.

---

[1]) В диаграммах же еще более высоких приближений может оказаться необходимым заранее заменить уже регуляризованными значениями также и «четырехвостые» блоки $\mathscr{P}$.

[2]) Другой подход к теории перенормировок в квантовой электродинамике изложен в книге: *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1984.