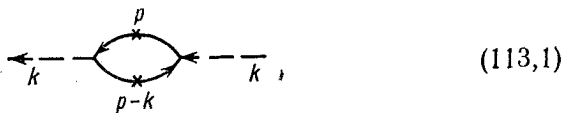


РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ

§ 113. Вычисление поляризационного оператора

Приступая к фактическому вычислению радиационных поправок, начнем с вычисления поляризационного оператора (*J. Schwinger*, 1949; *R. P. Feynman*, 1949). В первом приближении теории возмущений он дается петлей в диаграмме



Как уже отмечалось, задача облегчается, если начать ее с вычисления мнимой части искомой функции. В свою очередь это вычисление проще всего осуществляется путем использования соотношения унитарности. При этом линии виртуального фотона рассматриваются как отвечающие воображаемой «реальной» частице — векторному бозону массы  $M^2 = k^2$ , взаимодействующему с электроном по тому же закону, что и фотон. Тем самым (113,1) становится диаграммой «реального» процесса, чем и оправдывается применение к ней условия унитарности.

Таким образом, рассматриваем (113,1) как диаграмму для амплитуды перехода бозона самого в себя (диагональный элемент  $S$ -матрицы) через распад на электрон-позитронную пару. Крестики на диаграмме (113,1) показывают, по каким линиям она должна быть рассечена на две части так, чтобы показать промежуточное состояние, фигурирующее при применении соотношения унитарности. Это состояние содержит электрон с 4-импульсом  $p_- = p$  и позитрон с  $p_+ = -(p - k)$ .

Соотношение унитарности с двухчастичным промежуточным состоянием (71,4) при совпадающих начальном и конечном состояниях дает

$$2 \operatorname{Im} M_{ii} = \frac{|p|}{(4\pi)^2 e} \sum_{\text{поля\rho}} \int |M_{ni}|^2 d\omega. \quad (113,2)$$

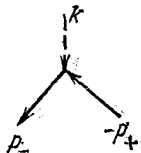
Здесь амплитуда  $M_{ii}$ , составленная по диаграмме (113,1), есть

$$iM_{ii} = \sqrt{4\pi} e_\mu^* \sqrt{4\pi} e_\nu \frac{i\mathcal{P}^{\mu\nu}}{4\pi}, \quad (113,3)$$

где  $e_\mu$  — 4-вектор поляризации бозона; согласно (14,13) он удовлетворяет уравнению

$$e_\mu k^\mu = 0.$$

Амплитуде же  $M_{ni}$  отвечает диаграмма распада бозона на пару:



Соответствующее выражение:

$$M_{ni} = -e \sqrt{4\pi} e_\mu j^\mu, \quad j^\mu = \bar{u}(p_-) \gamma^\mu u(-p_+). \quad (113,4)$$

Подставив (113,3—4) в (113,2), получим

$$2e_\mu^* e_\nu \text{Im } \mathcal{P}^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi} \frac{|p|}{\varepsilon} \sum_{\text{поляризация}} \int j^{\mu*} j^\nu e_\mu^* e_\nu do. \quad (113,5)$$

При этом  $p = p_- = -p_+$  и  $\varepsilon = \varepsilon_+ + \varepsilon_- = 2\varepsilon_+$  — импульсы и суммарная энергия пары в системе ее центра инерции; интегрирование производится по направлениям  $p$ , а суммирование — по поляризациям обеих частиц.

Усредним теперь обе стороны равенства (113,5) по поляризациям бозона. Усреднение осуществляется формулой

$$\overline{e_\mu^* e_\nu} = -\frac{1}{3} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$$

(ср. (14,15)). Приняв во внимание поперечность тензора  $\mathcal{P}^{\mu\nu}$  и вектора  $j^\mu$  ( $\mathcal{P}^{\mu\nu} k_\nu = 0$ ,  $j^\mu k_\mu = 0$ ) и используя, что  $\mathcal{P}_\mu^\mu = 3\mathcal{P}$ , получим в результате

$$2 \text{Im } \mathcal{P} = \frac{1}{12\pi} \frac{|p|}{\varepsilon} \sum_{\text{поляризация}} \int (ij^*) do. \quad (113,6)$$

Суммирование по поляризациям производится обычным образом, интегрирование по  $do$  сводится к умножению на  $4\pi$ , и в результате находим

$$\begin{aligned} 2 \text{Im } \mathcal{P} &= e^2 \frac{|p|}{3\varepsilon} \text{Sp } \gamma_\mu (\gamma p_- + m) \gamma^\mu (\gamma p_+ - m) = \\ &= -e^2 \frac{8|p|}{3\varepsilon} (p_+ p_- + 2m^2). \end{aligned}$$

Введем переменную

$$t = k^2 = (p_+ + p_-)^2 = 2(m^2 + p_+ p_-). \quad (113,7)$$

Тогда

$$\epsilon^2 = t, \quad p^2 = t/4 - m^2,$$

и окончательная формула для  $\text{Im } \mathcal{P}$  принимает вид

$$\text{Im } \mathcal{P}(t) = -\frac{\alpha}{3} \sqrt{\frac{t-4m^2}{t}} (t+2m^2), \quad t \geq 4m^2. \quad (113,8)$$

Значение  $t = 4m^2$  — пороговое для рождения виртуальным фотоном одной электрон-позитронной пары (ср. примеч. на с. 553); в рассматриваемом приближении теории возмущений ( $\sim e^2$ ) состояние с одной парой является единственным, которое может фигурировать в качестве промежуточного состояния в условии унитарности (113,2). В том же приближении, следовательно, при  $t < 4m^2$ , правая сторона в (113,2) равна нулю, так что

$$\text{Im } \mathcal{P}(t) = 0, \quad t < 4m^2. \quad (113,9)$$

По этой же причине в рассматриваемом приближении разрез для функции  $\mathcal{P}(t)$ , в плоскости комплексного  $t$  простирается

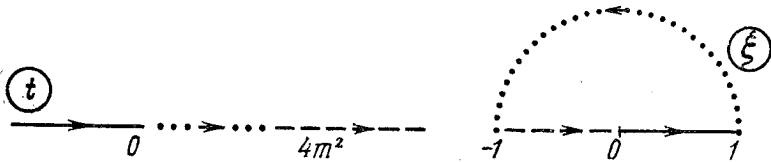


Рис. 19

лишь от точки  $t = 4m^2$  на вещественной оси, и эта точка должна фигурировать в качестве нижнего предела в дисперсионном интеграле (111,13). Таким образом, имеем

$$\mathcal{P}(t) = -\frac{\alpha}{3\pi} t^2 \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dt'}{t' - t - i0} \sqrt{\frac{t' - 4m^2}{t'}} \frac{t' + 2m^2}{t'^2}. \quad (113,10)$$

Для формулировки результата удобно ввести вместо  $t$  другую переменную, определив ее согласно

$$t/m^2 = -(1 - \xi)^2/\xi. \quad (113,11)$$

Это преобразование отображает верхнюю полуплоскость комплексного  $t$  на полукруг единичного радиуса в верхней полуплоскости комплексного  $\xi$ , как показано на рис. 19 (одинаковой штриховкой изображены соответствующие друг другу отрезки в обеих плоскостях). Нефизической области ( $0 \leq t/m^2 \leq 4$ )

отвечает при этом полуокружность  $\xi = e^{i\varphi}$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Физическим же областям ( $t < 0$  и  $t/m^2 > 4$ ) отвечают правый и левый вещественные радиусы.

Интеграл (113,10) проще всего вычисляется с помощью подстановки

$$t'/4m^2 = 1/(1-x^2),$$

причем сначала имеем в виду случай  $t < 0$  (тогда знаменатель в области интегрирования не обращается в нуль и мнимую добавку  $i0$  можно опустить). Выраженный через переменную  $\xi$  результат интегрирования имеет вид

$$\mathcal{P}(\xi) = \frac{\alpha m^2}{3\pi} \left\{ -\frac{22}{3} + \frac{5}{3} \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) + \left( \xi + \frac{1}{\xi} - 4 \right) \frac{1+\xi}{1-\xi} \ln \xi \right\}. \quad (113,12)$$

Аналитическое продолжение этой формулы определит функцию  $\mathcal{P}(t)$  и в области  $t > 4m^2$ : для этого надо положить в ней  $\xi = |\xi| e^{i\pi}$  (при этом логарифм дает вклад в мнимую часть:  $\ln \xi = \ln |\xi| + i\pi$ <sup>1)</sup>). Для нефизической области надо положить  $\xi = e^{i\varphi}$ , и тогда

$$\mathcal{P}(t) = \frac{2\alpha m^2}{3\pi} \left\{ -\frac{10}{3} \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 2 + \left( 1 + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \varphi \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right\}, \quad (113,13)$$

$$\frac{t}{4m^2} = \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

В предельном случае малых  $|t|$ , т. е.  $\xi \rightarrow 1$ , эти формулы дают

$$\mathcal{P}(t) = -\frac{\alpha}{15\pi} \frac{t^2}{m^2}, \quad |t| \ll 4m^2. \quad (113,14)$$

В обратном же случае больших  $|t|$ , т. е.  $\xi \rightarrow 0$ , получим

$$\mathcal{P}(t) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{3\pi} |t| \ln \frac{|t|}{m^2}, & -t \gg 4m^2, \\ \frac{\alpha}{3\pi} t \left( \ln \frac{t}{m^2} - i\pi \right), & t \gg 4m^2. \end{cases} \quad (113,15)$$

По смыслу теории возмущений полученные формулы справедливы до тех пор, пока  $\mathcal{P}/4\pi \ll D^{-1} = t/4\pi$ . Поэтому условие применимости формул (113,15):

$$\frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|t|}{m^2} \ll 1. \quad (113,16)$$

Радиационные поправки, содержащие  $\alpha \ln(|t|/m)$ , называют *логарифмическими*.

<sup>1)</sup> Осуществляемое таким образом аналитическое продолжение есть, как и требуется, продолжение на верхний берег разреза, поскольку полукруг на плоскости  $\xi$  соответствует именно верхней полуплоскости  $t$ .