§ 114. Радиационные поправки к закону Кулона

Исследуем на основании полученных формул радиационные поправки к закону Кулона. Эти поправки можно наглядно описать как результат *поляризации вакуума* вокруг точечного заряда.

Без учета поправок поле неподвижного центра (с зарядом e_1) дается кулоновым скалярным потенциалом $\Phi \equiv A_0^{(e)} = e_1/r$. Компоненты его трехмерного разложения Фурье:

$$\Phi(\mathbf{k}) \equiv A_0^{(e)}(\mathbf{k}) = 4\pi e_1/\mathbf{k}^2.$$

С учетом радиационных поправок это поле заменяется «эффективным полем»:

$$\mathscr{A}_0^{(e)} = A_0^{(e)} + \mathscr{D}_{0\rho}\frac{\mathscr{P}^{\rho\lambda}}{4\pi}A_\lambda^{(e)} = A_0^{(e)} + \frac{1}{4\pi}\mathscr{P}\mathscr{D}A_0^{(e)} \tag{114,1}$$

(ср. (103,15)). Второй член и дает искомую добавку к скалярному потенциалу. В первом приближении теории возмущений для $\mathscr{P}(k^2)$ надо взять полученное в предыдущем параграфе выражение, а функцию $\mathscr{D}(k^2)$ заменить ее нулевым приближением

$$\mathscr{D}(k^2) \approx D(k^2) = -4\pi/\mathbf{k}^2.$$

Таким образом, радиационная поправка к потенциалу поля

$$\delta\Phi(\mathbf{k}) = -\frac{4\pi e_1}{(\mathbf{k}^2)^2}\mathscr{P}(-\mathbf{k}^2). \tag{114,2}$$

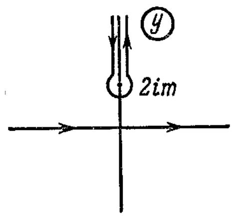

Рис. 20

Для определения вида этой поправки в координатном представлении надо произвести обратное преобразование Фурье:

$$\delta\Phi(\mathbf{r}) = \int e^{i\mathbf{kr}}\delta\Phi(\mathbf{k})\frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{114,3}$$

Поскольку $\delta\Phi(\mathbf{k})$ — функция лишь от $t = -\mathbf{k}^2$, то, произведя интегрирование по углам, получим

$$\delta\Phi(r) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty \delta\Phi(t)\frac{\sin\left(r\sqrt{-t}\right)}{r}d(-t) = \frac{1}{4\pi^2 r}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\delta\Phi(-y^2)e^{iry}y\,dy$$

(в последнем преобразовании использована четность подынтегрального выражения как функции от $y = \sqrt{-t}$). Теперь можно сместить контур интегрирования в верхнюю полуплоскость комплексной переменной y, совместив его с разрезом функции $\mathscr{P}(-y^2)$ (рис. 20). Этот разрез начинается от точки $2im$ и идет вверх по мнимой оси (причем физическому листу соответствует левый берег разреза). Введя вместо y новую переменную согласно $y = ix$, найдем

$$\delta\Phi(r) = \frac{1}{2\pi^2 r}\int_{2m}^{\infty} \operatorname{Im}\delta\Phi(x^2)\, e^{-rx} x\, dx.$$

Наконец, возвращаясь к интегрированию по $t = x^2$, имеем окончательно:

$$\delta\Phi(r) = \frac{1}{4\pi^2 r}\int_{4m^2}^{\infty} \operatorname{Im}\delta\Phi(t)\, e^{-r\sqrt{t}}\, dt. \tag{114,4}$$

Мнимую часть

$$\operatorname{Im}\delta\Phi(t) = -\frac{4\pi e}{t^2}\operatorname{Im}\mathscr{P}(t)$$

берем из (113,8) и после очевидной замены переменной находим

$$\Phi(r) = \frac{e_1}{r} + \delta\Phi(r) = \frac{e_1}{r}\left\{1 + \frac{2\alpha}{3\pi}\int_1^{\infty} e^{-2mr\zeta}\left(1 + \frac{1}{2\zeta^2}\right)\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^2}\, d\zeta\right\} \tag{114,5}$$

(*E. Uehling*, *R. Serber*, 1935).

Входящий сюда интеграл может быть вычислен в двух предельных случаях.

Рассмотрим прежде всего малые r ($mr \ll 1$). Разобьем интеграл от первого члена в круглой скобке на два:

$$I = \int_1^{\infty} e^{-2mr\zeta}\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^2}\, d\zeta = \int_1^{\zeta_1}\ldots d\zeta + \int_{\zeta_1}^{\infty}\ldots d\zeta \equiv I_1 + I_2,$$

причем ζ_1 выбрано так, что $1/mr \gg \zeta_1 \gg 1$. В силу этого в первом интеграле можно положить $r = 0$, и тогда

$$I_1 \approx \int_1^{\zeta_1}\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^2}\, d\zeta \approx \ln 2\zeta_1 - 1.$$

В I_2 можно, напротив, пренебречь единицей под корнем:

$$I_2 \approx \int_{\zeta_1}^{\infty} e^{-2mr\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta} = -\ln\zeta_1\cdot e^{-2mr\zeta_1} + 2mr\int_{\zeta_1}^{\infty} e^{-2mr\zeta}\ln\zeta\, d\zeta.$$

В экспоненте и нижнем пределе интеграла можно положить $\zeta_1 = 0$. Сделав после этого замену переменной $2mr\zeta = x$, получим

$$I_2 = -\ln 2\zeta_1 + \ln\frac{1}{mr} + \int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx = -\ln 2\zeta_1 + \ln\frac{1}{mr} - C,$$

где $C = 0{,}577\ldots$ — постоянная Эйлера. В интеграле же от второго члена в (114,5) можно сразу положить $r = 0$:

$$I_3 \approx \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^4}\,d\zeta = \frac{1}{6}.$$

Складывая все три интеграла (причем вспомогательное число ζ_1 сокращается), получаем

$$\Phi(r) = \frac{e_1}{r}\left[1 + \frac{2\alpha}{3\pi}\left(\ln\frac{1}{mr} - C - \frac{5}{6}\right)\right], \qquad r \ll \frac{1}{m}. \qquad (114,6)$$

При $mr \gg 1$ в интеграле существенна область $\zeta - 1 \sim 1/mr \ll 1$. Заменой $\zeta = 1 + \xi$ и соответствующими пренебрежениями он сводится к интегралу

$$e^{-2mr}\int_0^\infty e^{-2mr\xi}\frac{3}{2}\sqrt{2\xi}\,d\xi = \frac{3}{8(mr)^{3/2}}\sqrt{\pi}\,e^{-2mr}.$$

Таким образом, в этом случае[1])

$$\Phi(r) = \frac{e_1}{r}\left(1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}}\frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}}\right), \qquad r \gg \frac{1}{m}. \qquad (114,7)$$

Мы видим, что поляризация вакуума искажает кулоново поле точечного заряда в области $r \sim 1/m$ $(= \hbar/mc)$, где m — масса электрона. Вне этой области искажение поля убывает по экспоненциальному закону.

Сделаем еще одно замечание, имеющее общий характер. Мы подразумевали до сих пор, что радиационные поправки происходят от взаимодействия фотонного поля с электрон-позитронным. Так, приписывая внутренние замкнутые петли в фотонных собственно-энергетических диаграммах электронам, мы учитывали тем самым взаимодействие фотона с «электронным вакуумом». Но фотон взаимодействует и с полями других частиц; взаимодействие с «вакуумами» этих полей описывается такими же собственно-энергетическими диаграммами, в которых внутренние петли приписываются соответствующим частицам. Вкла-

---

[1]) Происхождение множителя e^{-2mr} в $\delta\Phi(r)$ понятно уже из вида исходного интеграла (114,4): при больших r в нем существенны значения t вблизи нижнего предела. Другими словами, показатель экспоненциального множителя определяется положением первой особенности функции $\delta\Phi(t)$.

ды таких диаграмм по порядку величины отличаются от вкладов электронных диаграмм некоторыми степенями отношения m_e/m, где m — масса данной частицы, а m_e — масса электрона.

Ближайшие по массе к электрону частицы — мюоны и пионы. Численно отношения m_e/m_μ и m_e/m_π близки к α. Поэтому радиационные поправки от этих частиц должны были бы учитываться вместе с электронными поправками следующих порядков. Но если для мюонов вычисление радиационных поправок с помощью существующей теории в принципе допустимо, то для пионов (являющихся сильно взаимодействующими частицами) это невозможно.

Это обстоятельство в принципе ограничивает возможность точных расчетов конкретных эффектов в существующей квантовой электродинамике. Рассмотрение же в сколь угодно высоких приближениях поправок от одного лишь фотон-электронного взаимодействия было бы превышением допустимой точности.

Рассмотренные в этом параграфе радиационные поправки к закону Кулона простираются, как мы видели, в области расстояний $r \lesssim 1/m_e$. Мы можем теперь добавить, что полученные формулы недостаточны на расстояниях $r < 1/m_\mu$ (или $1/m_\pi$), где становятся существенными также и эффекты поляризации вакуума других частиц.

§ 115. Вычисление мнимой части поляризационного оператора по интегралу Фейнмана

При прямом вычислении по диаграмме (петля на диаграмме (113,1)) поляризационный оператор в первом приближении теории возмущений давался бы интегралом

$$\frac{i\mathscr{P}^{\mu\nu}}{4\pi} \to -e^2 \int \operatorname{Sp} \gamma^\mu G(p) \gamma^\nu G(p-k) \frac{d^4p}{(2\pi)^4}. \qquad (115,1)$$

Однако этот интеграл, взятый по всему четырехмерному p-пространству, квадратично расходится и для получения конечного результата должен быть регуляризован по описанным в § 112 правилам.

Мы не будем воспроизводить здесь полностью такой вывод, но покажем, каким образом можно вычислить по интегралу (115,1) мнимую часть поляризационного оператора (которая была определена нами в § 113 с помощью условия унитарности); этот вывод содержит в себе ряд поучительных моментов.

Мнимая часть интеграла (115,1) не содержит расходимости и не требует поэтому регуляризации. Для скалярной функции $\operatorname{Im}\mathscr{P} = {}^1/_3 \operatorname{Im}\mathscr{P}^\mu_\mu$ имеем

$$\operatorname{Im}\mathscr{P} = \operatorname{Im}\left\{i\,\frac{4\pi e^2}{3(2\pi)^4}\int \frac{\operatorname{Sp}\gamma^\mu(\gamma p + m)\gamma_\mu(\gamma p + \gamma k + m)}{(p^2 - m^2 + i0)\left[(p-k)^2 - m^2 + i0\right]}\,d^4p\right\}.$$