

ды таких диаграмм по порядку величины отличаются от вкладов электронных диаграмм некоторыми степенями отношения m_e/m , где m — масса данной частицы, а m_e — масса электрона.

Ближайшие по массе к электрону частицы — мюоны и пионы. Численно отношения m_e/m_μ и m_e/m_π близки к α . Поэтому радиационные поправки от этих частиц должны были бы учитываться вместе с электронными поправками следующих порядков. Но если для мюонов вычисление радиационных поправок с помощью существующей теории в принципе допустимо, то для пионов (являющихся сильно взаимодействующими частицами) это невозможно.

Это обстоятельство в принципе ограничивает возможность точных расчетов конкретных эффектов в существующей квантовой электродинамике. Рассмотрение же в сколь угодно высоких приближениях поправок от одного лишь фотон-электронного взаимодействия было бы превышением допустимой точности.

Рассмотренные в этом параграфе радиационные поправки к закону Кулона простираются, как мы видели, в области расстояний $r \leq 1/m_e$. Мы можем теперь добавить, что полученные формулы недостаточны на расстояниях $r < 1/m_\mu$ (или $1/m_\pi$), где становятся существенными также и эффекты поляризации вакуума других частиц.

§ 115. Вычисление мнимой части поляризационного оператора по интегралу Фейнмана

При прямом вычислении по диаграмме (петля на диаграмме (113,1)) поляризационный оператор в первом приближении теории возмущений давался бы интегралом

$$\frac{i\mathcal{P}^{\mu\nu}}{4\pi} \rightarrow -e^2 \int \text{Sp } \gamma^\mu G(p) \gamma^\nu G(p-k) \frac{d^4p}{(2\pi)^4}. \quad (115,1)$$

Однако этот интеграл, взятый по всему четырехмерному p -пространству, квадратично расходится и для получения конечного результата должен быть регуляризован по описанным в § 112 правилам.

Мы не будем воспроизводить здесь полностью такой вывод, но покажем, каким образом можно вычислить по интегралу (115,1) мнимую часть поляризационного оператора (которая была определена нами в § 113 с помощью условия унитарности); этот вывод содержит в себе ряд поучительных моментов.

Мнимая часть интеграла (115,1) не содержит расходимости и не требует поэтому регуляризации. Для скалярной функции $\text{Im } \mathcal{P} = 1/3 \text{Im } \mathcal{P}_\mu^\mu$ имеем

$$\text{Im } \mathcal{P} = \text{Im} \left\{ i \frac{4\pi e^2}{3(2\pi)^4} \int \frac{\text{Sp } \gamma^\mu (\gamma p + m) \gamma_\mu (\gamma p + \gamma k + m)}{(p^2 - m^2 + i0) [(p-k)^2 - m^2 + i0]} d^4p \right\}.$$

После вычисления следа интеграл принимает вид

$$\text{Im } \mathcal{P}(k^2) = \text{Im} \int \frac{i\varphi(p) d^4p}{(p^2 - m^2 + i0) [(p - k)^2 - m^2 + i0]}, \quad (115,2)$$

$$\varphi(p) = \frac{2e^2}{3\pi^3} (2m^2 + pk - p^2).$$

Пусть $k^2 > 0$. Переходим к системе отсчета, в которой $k = (k_0, 0)$. В этой системе

$$(p - k)^2 = (p_0 - k_0)^2 - \mathbf{p}^2.$$

Введя также обозначение $\varepsilon = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ (ε не совпадает с «энергией» виртуального электрона $p_0!$), перепишем (115,2) в виде

$$\text{Im } \mathcal{P}(k^2) = \text{Im} \int d^3p \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{i\varphi(p_0, \mathbf{p})}{(p_0^2 - \varepsilon^2 + i0) [(p_0 - k_0)^2 - \varepsilon^2 + i0]}, \quad (115,3)$$

$$\varphi(p_0, \mathbf{p}) = \frac{2e^2}{3\pi^3} (m^2 + \varepsilon^2 + p_0 k_0 - p_0^2).$$

Подынтегральное выражение имеет четыре полюса по переменной p_0 :

$$\begin{aligned} a) \quad p_0 &= \varepsilon - i0, & a') \quad p_0 &= -\varepsilon + i0, \\ b) \quad p_0 &= k_0 - \varepsilon + i0, & b') \quad p_0 &= k_0 + \varepsilon - i0. \end{aligned}$$

На рис. 2 показано расположение этих полюсов; для определенности будем считать, что $k_0 > 0$ (окончательный ответ есть функция от k_0^2 и от знака k_0 не зависит). Вычислим скачок функции $\mathcal{P}(t)$, испытываемый ею на разрезе в плоскости комплексной переменной $t = k^2 = k_0^2$

или, что то же самое, на вещественной оси в плоскости комплексного k_0 . Вещественная часть функции $\mathcal{P}(t)$ непрерывна на разрезе, так что скачок

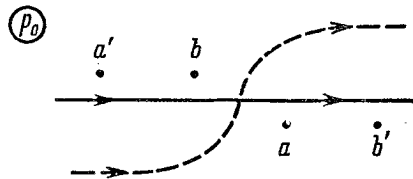


Рис. 21

$$\Delta \mathcal{P}(t) = 2i \text{Im } \mathcal{P}(t). \quad (115,4)$$

Прежде всего покажем, каким образом уже по виду интеграла можно установить положение разреза. Обозначим в (115,3) интеграл по p_0 как $I(p, k_0)$. До тех пор, пока верхние и нижние полюсы на рис. 21 находятся на конечных расстояниях друг от друга, путь интегрирования по p_0 можно увести вдаль от полюсов (пунктирная линия на рисунке). В этом случае интеграл $I(p, k_0)$ не изменится при бесконечно малом смещении полюсов b и b' вниз или вверх от вещественной оси, т. е. при замене $k_0 \rightarrow k_0 \pm i\delta$, $\delta \rightarrow 0$. Другими словами, значения $I(p, k_0)$ при

стремлении k_0 к своему вещественному значению сверху и снизу будут одинаковы, так что $I(p, k_0)$ не даст вклада в скачок $\Delta\mathcal{P}$. Ситуация изменится, лишь если два полюса (при $k_0 > 0$ это могут быть полюсы a и b) окажутся как раз один под другим, так что контур интегрирования будет «зажат» между ними и не сможет быть уведен. Таким образом, скачок $\Delta\mathcal{P} \neq 0$, лишь если где-либо в области интегрирования по d^3p может быть выполнено условие $k_0 - \varepsilon = \varepsilon$, т. е. $k_0 = 2\varepsilon = 2\sqrt{p^2 + m^2}$. Для этого, очевидно, должно быть $k_0 \geq 2m$, т. е. $t \geq 4m^2$).

Перепишем интеграл $I(p, k_0)$ в виде

$$I(p, k_0) = \int_C \frac{i\varphi(p_0, p) dp_0}{(p_0^2 - \varepsilon^2)[(p_0 - k_0)^2 - \varepsilon^2]}, \quad (115,5)$$

опустив члены $i0$ в знаменателе и соответственно изменив контур C интегрирования, как показано на рис. 22. Мы видим, что

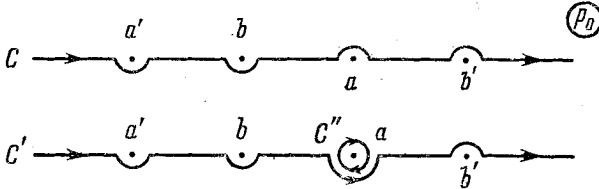


Рис. 22

возникновение скачка $\Delta\mathcal{P}(t)$ связано с невозможностью увода контура от полюса a (когда контур зажат между a и b). Имея это в виду, заменим контур C контуром C' , проходящим под точкой a , соответственно добавив интеграл по малой окружности C'' вокруг этой точки. После этого контур C' можно беспрепятственно увести от полюсов, так что интегрирование вдоль него дает вклад лишь в регулярную часть функции $\mathcal{P}(t)$. Для определения же искомого скачка достаточно рассматривать лишь интеграл по окружности C'' , что сводится к взятию вычета в полюсе a . Эта операция может быть осуществлена заменой в подынтегральном выражении:

$$\frac{1}{p_0^2 - \varepsilon^2} \rightarrow -2\pi i \delta(p_0^2 - \varepsilon^2) \quad (115,6)$$

¹⁾ Аналогичным образом убеждаемся в отсутствии разреза при $t = -k^2 < 0$. Выбрав в этом случае систему отсчета, в которой $k = (0, k)$, найдем, что полюсы подынтегрального выражения лежат при

$$p_0 = \pm(\varepsilon - i0), \quad p_0 = \pm(\sqrt{(p-k)^2 + m^2} - i0).$$

Оба нижних полюса лежат всегда в правой, а оба верхних — в левой полуплоскости p_0 , так что никакая их пара не может оказаться рядом.

(знак «—» связан с тем, что окружность вокруг полюса обходится в отрицательном направлении). При этом следует учитывать в аргументе δ -функции лишь корень $p_0 = +\varepsilon$ (обходится лишь полюс a , но не a'); это условие будет автоматически учтено, если условиться производить интегрирование лишь по половине импульсного 4-пространства: $p_0 > 0$.

После замены (115,6) скачок интеграла $I(\mathbf{p}, k_0)$ вычисляется непосредственно:

$$\Delta I = \{I(\mathbf{p}, k_0 + i\delta) - I(\mathbf{p}, k_0 - i\delta)\}_{\delta \rightarrow +0} =$$

$$= -2\pi i \int_0^{\infty} \delta(p_0^2 - \varepsilon^2) i\varphi(p_0, \mathbf{p}) \left[\frac{1}{(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2 + i\delta} - \frac{1}{(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2 - i\delta} \right] dp_0.$$

Используя равенство

$$\frac{1}{(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2 \pm i\delta} = \mathbf{P} \frac{1}{(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2} \mp i\pi\delta [(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2]$$

(см. (111,3)), получаем

$$\Delta I = i(2\pi i)^2 \int_0^{\infty} \delta(p_0^2 - \varepsilon^2) \delta[(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2] \varphi(p_0, \mathbf{p}) dp_0.$$

Аргументы δ -функций можно переписать в инвариантном виде, вычитая и прибавляя к ним p^2 :

$$p_0^2 - \varepsilon^2 = p^2 - m^2, \quad (k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2 = (k - p)^2 - m^2.$$

После этого находим окончательно

$$\Delta \mathcal{P}(k^2) = i(2\pi i)^2 \int_{p_0 > 0} d^4 p \cdot \varphi(p) \delta(p^2 - m^2) \delta[(p - k)^2 - m^2]. \quad (115,7)$$

Ввиду наличия δ -функций интегрирование производится фактически лишь в области пересечения гиперповерхностей

$$p^2 = m^2, \quad (p - k)^2 = m^2. \quad (115,8)$$

Поскольку в этой области все 4-векторы p времениподобны, то условие интегрирования по $p_0 > 0$ имеет инвариантный характер (верхняя полость конуса $p^2 = m^2$).

Сравним (115,7) с исходной формулой (115,2). Мы видим, что скачок функции $\mathcal{P}(t)$ на разрезе в плоскости t можно получить, если в исходном фейнмановском интеграле произвести замену

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i0} \rightarrow -2\pi i\delta(p^2 - m^2) \quad (115,9)$$

в пропагаторах, отвечающих пересеченным на диаграмме (113,1) линиям петли (S. Mandelstam, 1958, R. Cutkosky, 1960).

Обратим внимание на то, что условия (115,8) выделяют ту область импульсного пространства, в которой линии виртуальных частиц на диаграмме отвечают реальным частицам (или, как говорят, 4-импульсы p и $p - k$ лежат на массовой поверхности). Здесь ясно видна связь с методом соотношения унитарности, в котором эти же линии заменялись на линии реальных частиц промежуточного состояния.

Мы видим также математическую причину отсутствия расходимости в мнимой части диаграммы: она определяется интегрированием по конечной области массовой поверхности вместо интегрирования по всему бесконечному импульсному 4-пространству в исходном фейнмановском интеграле.

Чтобы получить теперь из (115,7) выведенную в § 113 формулу, вернемся к системе отсчета, в которой $\mathbf{k} = 0$, и проведем интегрирование по

$$d^4p = |\mathbf{p}| \varepsilon d\varepsilon dp_0 d\omega.$$

Интегрирование сводится к снятию δ -функций. При этом

$$\delta(p^2 - m^2) dp_0 = \delta(p_0^2 - \varepsilon^2) dp_0 \rightarrow \frac{1}{2\varepsilon} \delta(p_0 - \varepsilon) dp_0,$$

и затем

$$\begin{aligned} \delta[(p - k)^2 - m^2] d\varepsilon &= \delta[(p_0 - k_0)^2 - \varepsilon^2] d\varepsilon = \\ &= \delta(-2\varepsilon k_0 + k_0^2) d\varepsilon \rightarrow \frac{1}{2k_0} \delta\left(\varepsilon - \frac{k_0}{2}\right) d\varepsilon. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\Delta\mathcal{P}(t) = -\frac{i\pi^2}{2} \int \sqrt{\frac{t - 4m^2}{t}} \varphi(\varepsilon, \mathbf{p}) d\omega, \quad (115,10)$$

где $t = k^2 = k_0^2$, а значение функции φ берется при

$$p_0 = \varepsilon = k_0/2, \quad \mathbf{p}^2 = \varepsilon^2 - m^2 = k_0^2/4 - m^2,$$

т. е. равно

$$\varphi(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{\varepsilon^2}{3\pi^3} (2m^2 + t)$$

и не зависит от угла. Поэтому интегрирование по $d\omega$ сводится к умножению на 4π , и мы возвращаемся к (113,8).

В изложенном выводе существен только тот факт, что диаграмма рассекается на две части путем пересечения всего двух линий. Поэтому сформулированное правило остается в силе и для диаграмм, составленных из любых двух блоков, соединенных двумя (электронными или фотонными) линиями. Интеграл, вычисленный путем замены (115,9), определит при этом тот вклад в мнимую часть диаграммы, который в методе соотношения унитарности связан с соответствующим двухчастичным промежуточным состоянием.