§ 116. Электромагнитные формфакторы электрона

Рассмотрим вершинный оператор $\Gamma^\mu = \Gamma^\mu(p_2, p_1; k)$ в случае, когда две электронные линии являются внешними, а фотонная — внутренней. Электронным внешним линиям отвечают множители $u_1 = u(p_1)$ и $\bar{u}_2 = \bar{u}(p_2)$, так что Γ входит в выражение для диаграммы в виде произведения

$$j_{fi}^\mu = \bar{u}_2 \Gamma^\mu u_1. \tag{116,1}$$

Как уже отмечалось в § 111, оно представляет собой электронный ток перехода с учетом радиационных поправок. Требования релятивистской и калибровочной инвариантности позволяют установить общий вид матричной структуры этого тока.

Оператор электромагнитного взаимодействия $\hat{V} = e(\hat{j}\hat{A})$ — истинный скаляр (а не псевдоскаляр), чем выражается сохранение пространственной четности в этих взаимодействиях. Поэтому ток перехода j_{fi} — истинный 4-вектор (а не псевдовектор). Он может выражаться, следовательно, только через истинные же 4-векторы, составленные из имеющихся в нашем распоряжении двух 4-векторов p_1 и p_2 (третий $k = p_2 - p_1$) и биспиноров u_1 и u_2. Таких независимых 4-векторов, билинейных по $\bar{u}_2$ и u_1, всего три:

$$\bar{u}_2 \gamma u_1, \quad (\bar{u}_2 u_1)\, p_1, \quad (\bar{u}_2 u_1)\, p_2,$$

или, что то же,

$$\bar{u}_2 \gamma u_1, \quad (\bar{u}_2 u_1)\, P, \quad (\bar{u}_2 u_1)\, k, \tag{116,2}$$

где $P = p_1 + p_2$. Но условие калибровочной инвариантности требует поперечности тока перехода к 4-импульсу фотона k:

$$j_{fi} k = 0. \tag{116,3}$$

Этому условию удовлетворяют первые два из 4-векторов (116,2): первый в силу уравнений Дирака

$$(\gamma p_1 - m)\, u_1 = 0, \qquad \bar{u}_2 (\gamma p_2 - m) = 0, \tag{116,4}$$

а второй — потому, что $Pk = 0$. Ток j_{fi} представляется линейной комбинацией этих двух 4-векторов:

$$j_{fi}^\mu = f_1 (\bar{u}_2 u_1)\, P^\mu + f_2 (\bar{u}_2 \gamma^\mu u_1),$$

где f_1, f_2 — инвариантные функции; их называют *электромагнитными формфакторами электрона.*

Так как 4-импульсы p_1 и p_2 относятся к свободному электрону, то $p_1^2 = p_2^2 = m^2$, и из трех 4-векторов p_1, p_2, k (связанных равенством $k = p_2 - p_1$) можно составить всего одну независимую скалярную переменную, в качестве которой выберем k^2. Тогда формфакторы — функции k^2.

Выражение для тока можно представить и в других видах, с другим выбором двух независимых членов. Использовав уравнения (116,4) и правила коммутации матриц γ, легко убедиться, что

$$\left(\bar{u}_2\sigma^{\mu\nu}u_1\right)k_\nu = -2m\left(\bar{u}_2\gamma^\mu u_1\right) + \left(\bar{u}_2 u_1\right)P^\mu, \tag{116,5}$$

где $\sigma^{\mu\nu} = {}^1/_2\,(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$. Коэффициент при таком члене имеет, как мы увидим, важный физический смысл, так что будем писать

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu f\left(k^2\right) - \frac{1}{2m}\,g\left(k^2\right)\sigma^{\mu\nu}k_\nu, \tag{116,6}$$

где f, g — два других формфактора; смысл выделения множителя $1/2m$ выяснится ниже[1]. Для краткости мы пишем вместо тока вершинный оператор, подразумевая, что он должен браться «в обкладках» $\bar{u}_2\ \ldots\ u_1$.

Для выяснения свойств формфакторов рассмотрим диаграмму (110,16) процесса взаимодействия электрона с внешним полем. Соответствующая ей амплитуда рассеяния

$$M_{fi} = -ej^\mu_{fi}\mathcal{A}^{(e)}_\mu(k), \tag{116,7}$$

где $\mathcal{A}^{(e)}_\mu$ — эффективное (с учетом поляризации вакуума) внешнее поле.

Амплитуда (116,7) описывает два канала реакции. В канале рассеяния инвариантная переменная

$$t = k^2 = (p_2 - p_1)^2 \leqslant 0.$$

Заменив же $p_2 \to p_-$, $p_1 \to -p_+$, мы перейдем к аннигиляционному каналу, отвечающему рождению пары с 4-импульсами p_- и p_+. В этом канале

$$t = (p_- + p_+)^2 \geqslant 4m^2.$$

Область же значений $0 < t < 4m^2$ — нефизическая.

Обратимся к условию унитарности (111,12). В канале рассеяния ($t < 0$) нет в данном случае физических промежуточных состояний: один свободный электрон не может изменить свой импульс или родить какие-либо другие частицы. Нет их, конечно, и в нефизической области. Поэтому при $t < 4m^2$ правая сторона в равенстве (111,12) отсутствует, так что матрица T_{fi} (или, что то же, M_{fi}) эрмитова:

$$M_{fi} = M^*_{if}.$$

[1] Во избежание недоразумений напомним: в определении (116,6) предполагается, что k — 4-импульс входящей в вершину фотонной линии; для выходящей линии знак второго члена был бы обратным.

Перестановка начального и конечного состояний означает перестановку p_2 и p_1, а тем самым замену $k \to -k$. Представив M_{fi} в виде (116,7), имеем поэтому

$$j^{\mu}_{fi}\mathcal{A}^{(e)}_{\mu}(k) = j^{\mu *}_{if}\mathcal{A}^{(e)*}_{\mu}(-k).$$

Но $\mathcal{A}^{(e)}(-k) = \mathcal{A}^{(e)*}(k)$, так что отсюда следует, что матрица токов перехода тоже эрмитова:

$$j_{fi} = j^{*}_{if} \quad \text{при} \quad t < 4m^2. \tag{116,8}$$

Используя свойства матриц γ (21,7), легко проверить, что

$$(\bar{u}_2\gamma^{\mu}u_1) = (\bar{u}_1\gamma^{\mu}u_2)^*, \qquad (\bar{u}_2\sigma^{\mu\nu}u_1) = -(\bar{u}_1\sigma^{\mu\nu}u_2)^*.$$

Поэтому j^{*}_{if} отличается от j_{fi} лишь заменой функций $f(t)$ и $g(t)$ комплексно-сопряженными. Из равенства (116,8) следует тогда, что эти функции вещественны. Таким образом,

$$\operatorname{Im} f(t) = \operatorname{Im} g(t) = 0, \qquad t < 4m^2. \tag{116,9}$$

В аннигиляционном же канале ($t > 4m^2$) состояние f — пара, которая может превратиться в пару же с другими импульсами (упругое рассеяние) или в какую-либо более сложную систему. Поэтому правая часть условия унитарности отлична от нуля, матрица M_{fi} (а с нею и j_{fi}) не эрмитова, а потому формфакторы комплексны.

Аналитические свойства функций $f(t)$ и $g(t)$ вполне аналогичны рассмотренным в § 111 свойствам функции $\mathcal{P}(t)$ (хотя это и затруднительно доказать столь же прямым способом). Эти функции аналитичны в комплексной плоскости t, разрезанной вдоль положительной вещественной оси $t > 4m^2$, причем

$$f^*(t) = f(t^*), \qquad g^*(t) = g(t^*).$$

Условие перенормировки (110,19), примененное к вершинному оператору (116,6), приводит к требованию

$$f(0) = 1. \tag{116,10}$$

Для того чтобы автоматически учесть это условие (при вычислении функции $f(t)$ по ее мнимой части), надо применить дисперсионное соотношение вида (111,8) не к самой функции $f(t)$, а к $(f-1)/t$. Тогда получим дисперсионное соотношение «с одним вычитанием»:

$$f(t) - 1 = \frac{t}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(t')}{t'(t' - t - i0)}\, dt'. \tag{116,11}$$

Для формфактора же $g(t)$ никакие значения физическими требованиями заранее не предписываются. Поэтому для него дисперсионное соотношение пишется «без вычитаний»:

$$g(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{4m^2}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} g(t')}{t'-t-i0}\,dt'. \qquad (116,12)$$

Значение $g(0)$ имеет важный физический смысл: оно дает поправку к магнитному моменту электрона. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим рассеяние нерелятивистского электрона в постоянном, медленно меняющемся в пространстве магнитном поле.

Член в амплитуде рассеяния (116,7), связанный с формфактором $g(k^2)$, имеет вид

$$\delta M_{fi}=\frac{e}{2m}\,g\left(k^2\right)\left(\bar{u}_2\sigma^{\mu\nu}u_1\right)k_\nu A_\mu^{(e)}(k). \qquad (116,13)$$

Для чисто магнитного поля $A^{(e)\mu}=(0,\ \mathbf{A})$; постоянство поля во времени означает, что 4-вектор $k^\mu=(0,\ \mathbf{k})$, а медленному изменению поля в пространстве отвечают малые $\mathbf{k}$ (имея в виду дальнейший переход к пределу $\mathbf{k}\to 0$, сразу пишем в (116,13) $A^{(e)}$ вместо эффективного $\mathscr{A}^{(e)}$). Раскрыв выражение (116,13) и выразив его через трехмерные величины, получим

$$\delta M_{fi}=\frac{e}{2m}\,g\left(-\mathbf{k}^2\right)\left(\bar{u}_2\boldsymbol{\Sigma}u_1\right)i\left[\mathbf{k}\mathbf{A}_\mathbf{k}\right],$$

где $\boldsymbol{\Sigma}$ — матрица (21,21). Произведение $i[\mathbf{k}\mathbf{A}_\mathbf{k}]$ заменяем напряженностью магнитного поля $\mathbf{H}_\mathbf{k}$, после чего можно перейти к пределу $\mathbf{k}\to 0$. Наконец, введя нерелятивистские спинорные амплитуды w_1, w_2 согласно (23,12):

$$\bar{u}_2=\sqrt{2m}\,\left(w_2^*\,0\right),\qquad u_1=\sqrt{2m}\begin{pmatrix} w_1\\ 0\end{pmatrix},$$

находим окончательно

$$\delta M_{fi}=\frac{e}{2m}\,g(0)\,\mathbf{H}_\mathbf{k}\cdot 2m\left(w_2^*\boldsymbol{\sigma}w_1\right). \qquad (116,14)$$

Сравним это выражение с амплитудой рассеяния в постоянном электрическом поле со скалярным потенциалом $\Phi_\mathbf{k}$:

$$M_{fi}=-e\left(\bar{u}_2\gamma^0u_1\right)\Phi_\mathbf{k}\approx -e\Phi_\mathbf{k}\cdot 2m\left(w_2^*w_1\right).$$

Мы видим, что электрону в магнитном поле можно приписать дополнительную потенциальную энергию

$$-\frac{e}{2m}\,g(0)\,\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}_\mathbf{k}.$$

Это значит, что электрон обладает «аномальным» магнитным моментом

$$\mu' = \frac{e\hbar}{2mc} g(0) \tag{116,15}$$

(обычные единицы) в дополнение к «нормальному» дираковскому магнитному моменту $e\hbar/2mc$.

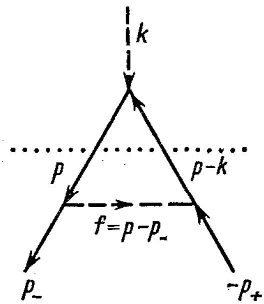
§ 117. Вычисление формфакторов электрона

Обратимся к фактическому вычислению формфакторов электрона (*J. Schwinger*, 1949).

В нулевом приближении теории возмущений вершинный оператор $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$, т. е. электронные формфакторы

$$f = 1, \quad g = 0.$$

Первая радиационная поправка к формфакторам определяется вершинной диаграммой



(117,1)

(с двумя реальными электронными концами и одним виртуальным фотонным концом). Мы начнем с вычисления мнимых частей формфакторов. Как было показано в предыдущем параграфе, они отличны от нуля лишь в аннигиляционном канале ($k^2 > 4m^2$); в соответствии с этим 4-импульсы электронных концов в диаграмме (117,1) отвечают рождающимся электрону и позитрону и обозначены p_- и $-p_+$. Аналитическое выражение диаграммы (117,1):

$$-ie\bar{u}(p_-)\Gamma^\mu u(-p_+) =$$

$$= (-ie)^3 \bar{u}(p_-)\gamma^\nu i \int G(p)\gamma^\mu G(p-k)\gamma^\lambda D_{\lambda\nu}(f)\frac{d^4p}{(2\pi)^4} u(-p_+), \tag{117,2}$$

или, в раскрытом виде,

$$\gamma^\mu f(k^2) - \frac{1}{2m} g(k^2)\sigma^{\mu\nu}k_\nu = \int \frac{i\varphi^\mu(p)\,d^4p}{(p^2-m^2)[(p-k)^2-m^2]}, \tag{117,3}$$