Это значит, что электрон обладает «аномальным» магнитным моментом

$$\mu' = \frac{e\hbar}{2mc} g(0) \qquad (116{,}15)$$

(обычные единицы) в дополнение к «нормальному» дираковскому магнитному моменту $e\hbar/2mc$.

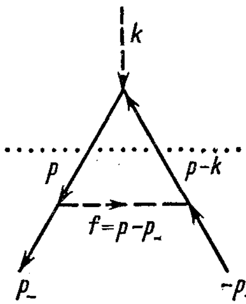
§ 117. Вычисление формфакторов электрона

Обратимся к фактическому вычислению формфакторов электрона (*J. Schwinger*, 1949).

В нулевом приближении теории возмущений вершинный оператор $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$, т. е. электронные формфакторы

$$f = 1, \quad g = 0.$$

Первая радиационная поправка к формфакторам определяется вершинной диаграммой



(117,1)

(с двумя реальными электронными концами и одним виртуальным фотонным концом). Мы начнем с вычисления мнимых частей формфакторов. Как было показано в предыдущем параграфе, они отличны от нуля лишь в аннигиляционном канале ($k^2 > 4m^2$); в соответствии с этим 4-импульсы электронных концов в диаграмме (117,1) отвечают рождающимся электрону и позитрону и обозначены p_- и $-p_+$. Аналитическое выражение диаграммы (117,1):

$$-ie\bar{u}(p_-)\Gamma^\mu u(-p_+) =$$

$$= (-ie)^3 \bar{u}(p_-)\gamma^\nu i \int G(p)\gamma^\mu G(p-k)\gamma^\lambda D_{\lambda\nu}(f)\frac{d^4p}{(2\pi)^4} u(-p_+), \qquad (117{,}2)$$

или, в раскрытом виде,

$$\gamma^\mu f(k^2) - \frac{1}{2m} g(k^2)\sigma^{\mu\nu}k_\nu = \int \frac{i\varphi^\mu(p)\, d^4p}{(p^2-m^2)[(p-k)^2-m^2]}, \qquad (117{,}3)$$

где обозначено

$$\varphi^{\mu}(p) = -e^2 \frac{\gamma^{\nu}(\gamma p + m)\gamma^{\mu}(\gamma p - \gamma k + m)\gamma_{\nu}}{4\pi^3 (p_- - p)^2} \qquad (117,4)$$

и для краткости опущены множители $\bar{u}(p_-) \ldots u(-p_+)$; везде ниже подразумевается, что обе стороны равенства берутся в этих «обкладках».

Проведенный на диаграмме (117,1) горизонтальный пунктир рассекает ее на две части таким образом, чтобы показать промежуточное состояние, которое фигурировало бы при вычислении мнимой части формфактора по условию унитарности: это есть состояние электрон-позитронной пары с импульсами, отличными от p_-, p_+. Это же рассечение показывает, где в интеграле (117,2) должна быть произведена замена полюсных множителей, если производить вычисление по правилу (115,9) (в (117,3) эти множители выделены в подынтегральном выражении).

Интеграл в (117,3) — того же вида, что и в (115,2). Поэтому мы можем сразу написать результат преобразования в форме (115,10), минуя промежуточные этапы:

$$2\gamma^{\mu}\,\mathrm{Im}\, f(t) - \frac{2}{2m}\sigma^{\mu\nu}k_{\nu}\,\mathrm{Im}\, g(t) = -\frac{\pi^2}{2}\sqrt{\frac{t-4m^2}{t}}\int \varphi^{\mu}(p)\, do_{\mathbf{p}}, \qquad (117,5)$$

где $t = k^2$, интегрирование производится по направлению вектора $\mathbf{p}$, а 4-векторы $p'_- \equiv p$ и $p'_+ \equiv k - p$ в определении функции $\varphi^{\mu}(p)$ (117,4) становятся 4-импульсами реальных (а не виртуальных) частиц. Выражение (117,5) относится к системе отсчета, в которой $\mathbf{k} = 0$; это — система центра инерции рождающейся пары p_-, p_+ (а тем самым — и «промежуточной» пары p'_-, p'_+). В этой системе, следовательно,

$$k = (k_0, 0), \quad p_- = \left(\frac{k_0}{2}, \mathbf{p}_-\right), \quad p_+ = \left(\frac{k_0}{2}, -\mathbf{p}_-\right), \quad p = \left(\frac{k_0}{2}, \mathbf{p}\right),$$

и легко проверить, что

$$f^2 = (p - p_-)^2 = -2\mathbf{p}^2(1 - \cos\theta) = -\frac{t - 4m^2}{2}(1 - \cos\theta), \qquad (117,6)$$

где θ — угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}_-$ (причем $\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}_-^2$). Подставив теперь (117,4) в (117,5) и исключив в подынтегральном выражении матрицы $\gamma^\nu \ldots \gamma_\nu$ с помощью формул (22,6), получим

$$\gamma^\mu \operatorname{Im} f(t) - \frac{1}{2m}\sigma^{\mu\nu}k_\nu \operatorname{Im} g(t) =$$
$$= -\frac{e^2}{4\sqrt{t(t-4m^2)}}\int \frac{do_{\mathbf{p}}}{2\pi(1-\cos\theta)}\gamma^\nu(\gamma p+m)\gamma^\mu(\gamma p-\gamma k+m)\gamma_\nu =$$
$$= -\frac{e^2}{4\sqrt{t(t-4m^2)}}\int \frac{do_{\mathbf{f}}}{2\pi(1-\cos\theta)}\left[-2m^2\gamma^\mu + 4m(P^\mu+2f^\mu)+\right.$$
$$\left.+2(\gamma p_+ - \gamma f)\gamma^\mu(\gamma p_- + \gamma f)\right], \qquad (117,7)$$

где введены 4-векторы

$$f = p - p_- = (0,\ \mathbf{f}), \qquad P = p_- - p_+ = (0,\ 2\mathbf{p}_-). \qquad (117,8)$$

Интегрирование сводится теперь к вычислению интегралов

$$(I,\ I^\mu,\ I^{\mu\nu}) = \int \frac{(1,\ f^\mu,\ f^\mu f^\nu)}{1-\cos\theta}\frac{do_{\mathbf{f}}}{2\pi} \qquad (117,9)$$

с каждым из трех перечисленных числителей.

Интеграл I логарифмически расходится при $\theta \to 0$. Переписывая его как

$$I = \int_0^{t-4m^2}\frac{d(\mathbf{f}^2)}{\mathbf{f}^2} = \int_0^{-(t-4m^2)}\frac{d(f^2)}{f^2},$$

мы видим, что расходимость отвечает малым «массам» виртуального фотона. Таким образом, это — «инфракрасная» расходимость. Мы отложим ее подробное рассмотрение до § 122. Здесь отметим только, что она фиктивна в том смысле, что при правильном учете всех физических эффектов подобные расходимости взаимно компенсируются и исчезают. Поэтому мы можем произвольным образом «обрезать» интеграл снизу, а в дальнейшем, при расчете реальных физических явлений, устремить предел обрезания к нулю.

Здесь будет проще всего совершать обрезание релятивистски инвариантным образом. Для этого припишем виртуальному фотону f малую, но конечную массу λ ($\lambda \ll m$), т. е. заменим в фотонном пропагаторе $D(f^2)$ в (117,2)

$$f^2 \to f^2 - \lambda^2. \qquad (117,10)$$

После этого

$$I = \int_0^{-(t-4m^2)}\frac{d(f^2)}{f^2-\lambda^2} = \ln\frac{t-4m^2}{\lambda^2}. \qquad (117,11)$$

Интеграл I^μ, в котором f^μ — пространственноподобный 4-вектор, должен выражаться через 4-вектор P^μ — из двух имеющихся в нашем распоряжении 4-векторов P^μ и k^μ пространственноподобен (при произвольных p_+, p_-) только P^μ. Поэтому $I^\mu = AP^\mu$. Умножив это равенство на P_μ и вычислив интеграл $P_\mu I^\mu$ в системе центра инерции пары (компоненты 4-векторов f и P — из (117,8)), найдем

$$A = \frac{1}{2\mathbf{p}^2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathbf{f}\mathbf{p}_-\,d\cos\theta}{1-\cos\theta} = -\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} d\cos\theta = -1.$$

Таким образом,

$$I^\mu = -P^\mu. \tag{117,12}$$

Аналогичным образом вычисляется интеграл

$$I^{\mu\nu} = \frac{1}{4}P^2\left(g^{\mu\nu} - \frac{P^\mu P^\nu}{P^2}\right) + \frac{1}{4}P^\mu P^\nu \tag{117,13}$$

(для определения коэффициентов в этом выражении достаточно вычислить интегралы I^μ_μ и $I^{\mu\nu}P_\mu P_\nu$).

Дальнейшее вычисление происходит следующим образом. Подставив (117,11—13) в (117,7), мы получим между «обкладками» $\bar{u}(p_-)\ \ldots\ u(-p_+)$ сумму ряда членов. В каждом из них «прогоним» (с помощью правил коммутации матриц γ^μ) множитель γp_+ направо, а γp_- — налево; после этого можно заменить $\gamma p_- \to m$, $\gamma p_+ \to -m$, поскольку

$$\bar{u}(p_-)\gamma p_- = m\bar{u}(p_-), \qquad \gamma p_+ u(-p_+) = -mu(-p_+).$$

В получающейся в результате сумме

$$-4(p_+p_-)I\gamma^\mu + 2mP^\mu - 3P^2\gamma^\mu$$

можно еще заменить P^μ эквивалентным ему (в обкладках!) выражением

$$P^\mu \to 2m\gamma^\mu + \sigma^{\mu\nu}k_\nu$$

(ср. (116,5)). Наконец, выразив все величины через инвариант $t = k^2$ ($2p_+p_- = t - 2m^2$, $P^2 = 4m^2 - t$) и сравнив затем обе стороны равенства (117,7), получим следующие формулы для мнимых частей формфакторов:

$$\operatorname{Im} g(t) = \frac{\alpha m^2}{\sqrt{t(t-4m^2)}}, \tag{117,14}$$

$$\operatorname{Im} f(t) = \frac{\alpha}{4\sqrt{t(t-4m^2)}}\left[-3t + 8m^2 + 2(t-2m^2)\ln\frac{t-4m^2}{\lambda^2}\right]. \tag{117,15}$$

Инфракрасная расходимость имеется только в $\operatorname{Im} f(t)$.

Сами функции $f(t)$ и $g(t)$ вычисляются по их мнимым частям с помощью формул (116,11—12). Интегрирование в этих формулах удобно произвести с помощью тех же подстановок, которые были использованы в § 113 при вычислении $\mathcal{P}(t)$. Выраженные через переменную ξ (113,11) формфакторы определяются формулами

$$g(\xi)=\frac{\alpha}{\pi}\frac{\xi\ln\xi}{\xi^2-1}, \tag{117,16}$$

$$f(\xi)-1=\frac{\alpha}{2\pi}\left\{2\left(1+\frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}\ln\xi\right)\ln\frac{m}{\lambda}-\frac{3(1+\xi^2)+2\xi}{2(1-\xi^2)}\ln\xi+\right.$$
$$\left.+\frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}\left[\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\ln^2\xi-2F(\xi)+2\ln\xi\ln(1+\xi)\right]\right\}, \tag{117,17}$$

где $F(\xi)$ — функция Спенса, определенная согласно (131,19).

В нефизической области ($0<t/m^2<4$) надо положить $\xi=e^{i\varphi}$. Тогда выражения для формфакторов могут быть приведены к виду

$$f(\varphi)-1=\frac{\alpha}{\pi}\left\{\left(1-\frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}\right)\ln\frac{m}{\lambda}+\frac{3\cos\varphi+1}{2\sin\varphi}\varphi+\frac{2}{\operatorname{tg}\varphi}\int_0^{\varphi/2}x\operatorname{tg}x\,dx\right\}, \tag{117,18}$$

$$g(\varphi)=\frac{\alpha}{2\pi}\frac{\varphi}{\sin\varphi}. \tag{117,19}$$

Наконец, выпишем предельные формулы для малых $|t|$:

$$f(t)-1=\frac{\alpha t}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{\lambda}-\frac{3}{8}\right),\quad g(t)=\frac{\alpha}{2\pi},\quad |t|\ll 4m^2, \tag{117,20}$$

и для больших $|t|$:

$$f(t)-1=-\frac{\alpha}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\ln^2\frac{|t|}{m^2}+2\ln\frac{m}{\lambda}\ln\frac{|t|}{m^2}\right)+\begin{cases} i\dfrac{\alpha}{2}\ln\dfrac{t}{\lambda^2}, & t\gg 4m^2,\\ 0, & -t\gg 4m^2,\end{cases} \tag{117,21}$$

$$g(t)=-\frac{\alpha m^2}{\pi t}\ln\frac{|t|}{m^2}+\begin{cases} i\dfrac{\alpha m^2}{t}, & t\gg 4m^2,\\ 0, & -t\gg 4m^2.\end{cases} \tag{117,22}$$

Формула (117,21) справедлива (в отношении $\operatorname{Re}f$), как говорят, с дважды логарифмической точностью, т. е. с точностью до квадратов больших логарифмов[1]).

[1]) Выражение для вершинного оператора в случае одного виртуального и одного реального электронных концов и реального фотонного конца — см. *Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1981. — § 5.1.3. — С. 330.