§ 118. Аномальный магнитный момент электрона

Как уже было указано в § 116, значение $g(0)$ определяет радиационную поправку к магнитному моменту электрона. Если ставить себе целью вычисление лишь этой величины, то вычисление всей функции $g(t)$, конечно, не обязательно. С помощью (117,14) и (116,12) имеем

$$g(0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{4m^2}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} g(t')}{t'}\,dt'=\frac{\alpha}{4\pi}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{3/2}\sqrt{x-1}}=\frac{\alpha}{2\pi}. \qquad (118,1)$$

С учетом этой поправки магнитный момент электрона

$$\mu=\frac{e\hbar}{2mc}\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right). \qquad (118,2)$$

Эта формула была впервые получена *Швингером* (1949).

В следующем приближении ($\sim\alpha^2$) радиационные поправки в формфакторах изображаются семью диаграммами (106,10, *в—и*). Определение даже одного только значения $g(0)$ в этом приближении требует очень сложных вычислений. Отсылая за деталями вычислений к оригинальным статьям, приводим лишь окончательное значение поправки второго приближения[1]):

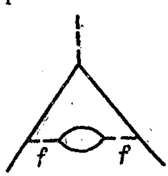
$$g^{(2)}(0)=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\left(\frac{197}{144}+\frac{\pi^2}{12}-\frac{\pi^2}{2}\ln 2+\frac{3}{4}\zeta(3)\right)=-0{,}328\frac{\alpha^2}{\pi^2}, \qquad (118,3)$$

так что магнитный момент электрона

$$\mu=\frac{e\hbar}{2mc}\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}-0{,}328\frac{\alpha^2}{\pi^2}\right) \qquad (118,4)$$

(*C. Sommerfield*, 1957; *A. Petermann*, 1957).

Остановимся особо на вкладе поляризации вакуума в поправку $g^{(2)}(0)$. Это — диаграмма



(118,5)

содержащая фотонную собственно-энергетическую часть. Она отличается от диаграммы (117,1) первого приближения лишь тем, что вместо фотонного пропагатора $D(f^2)=4\pi/f^2$ в ней стоит произведение

$$D(f^2)\frac{\mathcal{P}(f^2)}{4\pi}D(f^2)=\frac{4\pi}{f^2}\frac{\mathcal{P}(f^2)}{f^2},$$

[1]) Проведение вычислений по методу унитарности — см. *Терентьев М. В.*// ЖЭТФ. — 1962. — Т. 43. — С. 619.

где $\mathscr{P}(f^2)$ — вычисленный в § 113 поляризационный оператор в первом ($\sim\alpha$) приближении. Частично повторив, с этим изменением, произведенные в предыдущем параграфе вычисления, получим для «поляризационной части» поправки

$$\operatorname{Im} g^{(2)}_{\text{поляр}}(t) = \frac{\alpha m^2}{\sqrt{t(t-4m^2)}} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathscr{P}(f^2)}{f^2} \frac{1+3\cos\theta}{2}\, d\cos\theta, \qquad (118,6)$$

причем

$$f^2 = -\frac{t-4m^2}{2}(1-\cos\theta) \qquad (118,7)$$

(см. (117,6)). Вычисление этого интеграла, а затем интеграла

$$g^{(2)}_{\text{поляр}}(0) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{4m^2}^{\infty} \operatorname{Im} g^{(2)}_{\text{поляр}}(t') \frac{dt'}{t'} \qquad (118,8)$$

приводит к значению

$$g^{(2)}_{\text{поляр}}(0) = \frac{\alpha^2}{\pi^2}\left(\frac{119}{36} - \frac{\pi^2}{3}\right) = 0{,}016\,\frac{\alpha^2}{\pi^2}; \qquad (118,9)$$

оно составляет $\sim 5\,\%$ всего значения (118,3).

Мы уже отмечали (в конце § 114), что определенный вклад в радиационные поправки могут вносить также и эффекты поляризации вакуума других частиц. Вклад мюонного вакуума в аномальный магнитный момент электрона мы получим по тем же формулам (118,6—8), в которых (в том числе в определении переменной f^2) m есть по-прежнему масса электрона (m_e), но в качестве параметра m, входящего в выражение $\mathscr{P}(f^2)$, должна быть взята масса мюона (m_μ). Величина $\mathscr{P}(f^2)/f^2$ есть функция только отношения f^2/m_μ^2. В интеграле же (118,8) существенна область значений t (а потому и f^2), сравнимых с m_e^2; так что отношение $f^2/m_\mu^2 \sim (m_e/m_\mu)^2 \ll 1$ и для оценки интегралов можно воспользоваться предельной формулой (113,14), согласно которой

$$\frac{\mathscr{P}(f^2)}{f^2} = -\frac{\alpha}{15\pi}\frac{f^2}{m_\mu^2}.$$

Отсюда видно, что вклад в $g^{(2)}(0)$, обязанный мюонной поляризации вакуума, имеет лишний малый множитель $(m_e/m_\mu)^2$.

Обратная ситуация возникает, однако, при нахождении поправок к магнитному моменту мюона. Поскольку в (118,3) масса частицы не входит, это значение $g^{(2)}(0)$ относится и к мюону, причем в нем учтен вклад поляризации мюонного же вакуума. Но вклад поляризации вакуума других частиц — электронов — оказывается в данном случае значительно больше. Он вычисляется по формулам (118,6—8), в которых надо теперь заменить $m \to m_\mu$, а в качестве $\mathcal{P}(t)$ подставить электронный поляризационный оператор. В противоположность предыдущему случаю теперь будет существенна область значений $f^2/m_e^2 \sim (m_\mu/m_e)^2 \gg 1$ и в качестве $\mathcal{P}(f^2)$ нужно взять предельное выражение (113,15):

$$\frac{\mathcal{P}(f^2)}{f^2} = \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|f^2|}{m_e^2}.$$

Вычисление интегралов приводит к значению

$$[g^{(2)}(0)]_{\text{эл. п}} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{3} \ln \frac{m_\mu}{m_e} - \frac{25}{36}\right) = 1{,}09 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \qquad (118{,}10)$$

(*H. Suura, E. H. Wichmann*, 1957; *A. Petermann*, 1957).

Сложив (118,10) со (118,3), получим для магнитного момента мюона

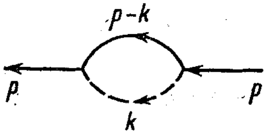
$$\mu_{\text{мюон}} = \frac{e\hbar}{2m_\mu c}\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} + 0{,}76 \frac{\alpha^2}{\pi^2}\right). \qquad (118{,}11)$$

Заметим, что вклад поляризации мюонного вакуума (118,9) составляет $\sim 2\%$ всего значения $g^{(2)}(0)$. Вклад такого же порядка (ввиду близости масс) дала бы и пионная поляризация вакуума, которая вообще не может быть вычислена точно. По этой причине не имело бы уже смысла и вычисление поправок $\sim \alpha^3$ к магнитному моменту мюона.

§ 119. Вычисление массового оператора

На примере вычисления массового оператора продемонстрируем метод прямой регуляризации интегралов Фейнмана.

В первом неисчезающем приближении массовый оператор представляется петлей в диаграмме



(119,1)

Ей отвечает интеграл

$$-i\mathscr{M}(p) = (-ie)^2 \int \gamma^\mu G(p-k)\, \gamma^\nu D_{\mu\nu}(k) \frac{d^4k}{(2\pi)^4};$$

подставив пропагаторы и сведя вместе множители $\gamma^\mu \ldots \gamma_\mu$ с помощью формул (22,6), получим

$$\mathscr{M}(p) = -\frac{8\pi i}{(2\pi)^4} e^2 \int \frac{2m - (\gamma p) + (\gamma k)}{[(p-k)^2 - m^2](k^2 - \lambda^2)} d^4k \qquad (119{,}2)$$