ляется по формулам (118,6—8), в которых надо теперь заменить $m \to m_\mu$, а в качестве $\mathscr{P}(t)$ подставить электронный поляризационный оператор. В противоположность предыдущему случаю теперь будет существенна область значений $f^2/m_e^2 \sim (m_\mu/m_e)^2 \gg 1$ и в качестве $\mathscr{P}(f^2)$ нужно взять предельное выражение (113,15):

$$\frac{\mathscr{P}(f^2)}{f^2} = \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|f^2|}{m_e^2}.$$

Вычисление интегралов приводит к значению

$$[g^{(2)}(0)]_{\text{эл. п}} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{3} \ln \frac{m_\mu}{m_e} - \frac{25}{36}\right) = 1{,}09 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \qquad (118{,}10)$$

(*H. Suura*, *E. H. Wichmann*, 1957; *A. Petermann*, 1957).

Сложив (118,10) со (118,3), получим для магнитного момента мюона

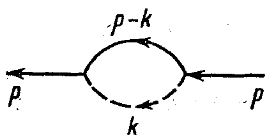
$$\mu_{\text{мюон}} = \frac{e\hbar}{2m_\mu c}\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} + 0{,}76 \frac{\alpha^2}{\pi^2}\right). \qquad (118{,}11)$$

Заметим, что вклад поляризации мюонного вакуума (118,9) составляет $\sim 2\%$ всего значения $g^{(2)}(0)$. Вклад такого же порядка (ввиду близости масс) дала бы и пионная поляризация вакуума, которая вообще не может быть вычислена точно. По этой причине не имело бы уже смысла и вычисление поправок $\sim\alpha^3$ к магнитному моменту мюона.

§ 119. Вычисление массового оператора

На примере вычисления массового оператора продемонстрируем метод прямой регуляризации интегралов Фейнмана.

В первом неисчезающем приближении массовый оператор представляется петлей в диаграмме



(119,1)

Ей отвечает интеграл

$$-i\mathscr{M}(p) = (-ie)^2 \int \gamma^\mu G(p-k)\gamma^\nu D_{\mu\nu}(k) \frac{d^4k}{(2\pi)^4};$$

подставив пропагаторы и сведя вместе множители $\gamma^\mu \ldots \gamma_\mu$ с помощью формул (22,6), получим

$$\mathscr{M}(p) = -\frac{8\pi i}{(2\pi)^4} e^2 \int \frac{2m - (\gamma p) + (\gamma k)}{[(p-k)^2 - m^2](k^2 - \lambda^2)} d^4k \qquad (119{,}2)$$

(чертой над буквой $\mathscr{M}$ мы отмечаем нерегуляризованное значение интеграла). В фотонный пропагатор введена фиктивная «масса фотона» λ с целью устранения (как и в § 117) инфракрасной расходимости.

Преобразуем интеграл с помощью формулы (131,4), понимая в ней под a_1 и a_2 два множителя в знаменателе (119,2). После простой перегруппировки членов в знаменателе нового интеграла получим

$$\bar{\mathscr{M}}(p) = -\frac{8\pi i}{(2\pi)^4} e^2 \int d^4k \int\limits_0^1 dx \, \frac{2m - (\gamma p) + (\gamma k)}{[(k - px)^2 - a^2]^2}, \qquad (119,3)$$

где

$$a^2 = m^2x^2 - (p^2 - m^2)\, x\,(1 - x) + \lambda^2 (1 - x). \qquad (119,4)$$

Замена переменной $k \to k + px$ приводит подынтегральное выражение в (119,3) к виду, в котором его знаменатель зависит только от k^2. При этом, однако, согласно (131,17—18) к интегралу добавится аддитивная постоянная:

$$\bar{\mathscr{M}}(p) = -\frac{8\pi i}{(2\pi)^4} e^2 \left\{ \int d^4k \int\limits_0^1 dx \, \frac{2m - (\gamma p)(1 - x)}{(k^2 - a^2)^2} - \frac{i\pi^2}{4} (\gamma p) \right\} \qquad (119,5)$$

(член с (γk) в числителе теперь опущен как обращающийся в нуль при интегрировании по направлениям 4-вектора k, — ср. (131,8)).

Регуляризация этого интеграла заключается в таких вычитаниях, которые привели бы его к выражению вида (110,20). Последнее обращается в нуль при умножении на волновую амплитуду $u(p)$, если p — 4-импульс реального электрона. Не вводя $u(p)$ явно, можно сформулировать это условие как требование обращения $\mathscr{M}(p)$ в нуль при замене

$$\gamma p \to m, \qquad p^2 \to m^2. \qquad (119,6)$$

Форма интеграла (119,5) удобна при этом тем, что 4-вектор p входит в него только в виде γp и p^2 (а члены вида kp отсутствуют).

Вычтя из (119,5) такое же выражение с заменой (119,6), получим

$$\frac{-8\pi i e^2}{(2\pi)^4} \left\{ \int d^4k \int\limits_0^1 dx \cdot [2m - \gamma p\,(1 - x)] \left[\frac{1}{(k^2 - a^2)^2} - \frac{1}{(k^2 - a_0^2)^2} \right] - \right.$$

$$\left. - \int d^4k \int\limits_0^1 dx \, \frac{1 - x}{(k^2 - a_0^2)^2} (\gamma p - m) - \frac{i\pi^2}{4} (\gamma p - m) \right\}, \qquad (119,7)$$

где

$$a_0^2 = m^2x^2 + \lambda^2(1-x).$$

Для окончательной регуляризации, однако, должно быть произведено еще одно вычитание: согласно (110,20) при замене (119,6) должно обратиться в нуль не только $\mathscr{M}(p)$ в целом, но и оно же без одного множителя $\gamma p - m$. Соответствующим вычитанием целиком отбрасываются второй и третий члены в фигурных скобках в (119,7)[1]). Первый же интеграл предварительно преобразуем, введя еще одно вспомогательное интегрирование с помощью формулы (131,5), положив в ней $n=2$ и понимая под a и b соответственно k^2-a^2 и $k^2-a_0^2$. Тогда выражение (119,7) принимает вид

$$(\gamma p - m)\frac{16\pi i}{(2\pi)^4}e^2\int d^4k\int_0^1 dx\int_0^1 dz\cdot\frac{(\gamma p+m)\,[2m-\gamma p\,(1-x)]\,x\,(1-x)}{\left[k^2-a_0^2+\left(p^2-m^2\right)x\,(1-x)\,z\right]^3}$$

(здесь использовано также тождество $p^2-m^2=(\gamma p-m)(\gamma p+m)$). Сразу же произведем интегрирование по d^4k. Предположив, что $p^2-m^2<0$, и воспользовавшись (131,14), получим

$$(\gamma p - m)\frac{e^2}{2\pi}\int_0^1 dx\int_0^1 dz\cdot\frac{(\gamma p+m)\,[2m-(\gamma p)(1-x)]\,x\,(1-x)}{m^2x^2+\lambda^2(1-x)+(m^2-p^2)\,x\,(1-x)\,z}.$$

Теперь остается, опустив временно множитель $(\gamma p - m)$, вычесть такой же интеграл с заменой (119,6); после простых приведений получим

$$\mathscr{M}(p)=(\gamma p-m)^2\frac{e^2}{2\pi}\int_0^1 dx\int_0^1 dz\cdot\frac{m\,(1-x^2)-(\gamma p+m)\,(1-x)^2\left[1-\dfrac{2x\,(1+x)\,z}{x^2+(\lambda/m)^2}\right]}{m^2x+(m^2-p^2)\,(1-x)\,z} \tag{119,8}$$

(в общем знаменателе опущен член с λ^2, так как это не приведет здесь к расходимости; в другом месте $\lambda^2(1-x)$ заменено на λ^2, так как инфракрасной расходимости будет отвечать расходимость при $x\to 0$).

---

[1]) Тем самым мы в процессе «перенормировки на ходу» (см. с. 548) опускаем поправки к перенормировочной константе Z_1 (см. § 110). Соответствующие интегралы логарифмически расходятся. Если ввести «параметр обрезания» $\Lambda^2 \gg m^2, p^2$, ограничив область интегрирования по d^4k условием $k^2 \leqslant \Lambda^2$, то эту поправку можно вычислить в явном виде. Вычисление приводит к результату

$$Z_1 = 1 + Z_1^{(1)},\qquad Z_1^{(1)} = -\frac{\alpha}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\ln\frac{\lambda^2}{m^2}+\frac{9}{4}\right]. \tag{119,7a}$$

Интегрирование в (119,8) (сначала по z, затем по x) довольно длинно, но элементарно и приводит к следующему окончательному результату:

$$\mathscr{M}(p)=\frac{\alpha}{2\pi m}(\gamma p-m)^2\left\{\frac{1}{2(1-\rho)}\left(1-\frac{2-3\rho}{1-\rho}\ln\rho\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\gamma p+m}{m\rho}\left[\frac{1}{2(1-\rho)}\left(2-\rho+\frac{\rho^2+4\rho-4}{1-\rho}\ln\rho\right)+1+2\ln\frac{\lambda}{m}\right]\right\},\tag{119,9}$$

где обозначено

$$\rho=\frac{m^2-p^2}{m^2}$$

(*R. Karplus*, *N. M. Kroll*, 1950). Интеграл вычислен в предположении $\rho>0$, причем $\rho\gg\lambda/m$. В соответствии с правилом обхода полюсов, при аналитическом продолжении выражения (119,9) в область $\rho<0$ фаза логарифма определяется заменой $m\to m-i0$; при этом $\rho\to\rho-i0$, так что $\ln\rho$ при $\rho<0$ надо понимать как

$$\ln\rho=\ln|\rho|-i\pi,\qquad \rho<0.\tag{119,10}$$

Рассмотрим поведение массового оператора при $p^2\gg m^2$. Имеем тогда $-\rho\approx p^2/m^2\gg1$ и с логарифмической точностью

$$\mathscr{M}(p)=-\left[\mathscr{G}^{-1}(p)-G^{-1}(p)\right]\approx\frac{\alpha}{4\pi}(\gamma p)\ln\frac{p^2}{m^2}.\tag{119,11}$$

Как и в случае фотонного пропагатора (ср. формулы (113,15—16) для поляризационного оператора), поправка к G^{-1} оказывается малой только при не слишком большой энергии, именно при

$$\frac{\alpha}{4\pi}\ln\frac{p^2}{m^2}\ll1.$$

В данном случае, однако, логарифмический рост в известном смысле фиктивен, он может быть устранен надлежащим выбором калибровки, т. е. функции $D^{(l)}$ в фотонном пропагаторе (*Л. Д. Ландау*, *А. А. Абрикосов*, *И. М. Халатников*, 1954). Именно, для этого надо положить (в обозначениях § 103)

$$D^{(l)}=0,\tag{119,12}$$

между тем как формула (119,9) получена в калибровке

$$D^{(l)}=D.\tag{119,13}$$

Это свойство калибровки (119,12) делает ее особенно удобной для исследования характера теории при $p^2\gg m^2$, что и будет использовано ниже, в § 132.

Для доказательства сделанного утверждения замечаем, что если мы интересуемся только членами $\sim e^2$, то преобразование от калибровки (119,13) к калибровке (119,12) можно считать бесконечно малым. Соответственно этому можно прямо воспользоваться формулой (105,14), положив в ней

$$d^{(l)}(q) = -\frac{D}{q^2} = -\frac{4\pi}{(q^2)^2},$$

а также заменив, с требуемой точностью, функции $\mathcal{G}$ в подынтегральном выражении на G. В интеграле по d^4q будет существенна область $q \gg p$; при этом $G(p-q)$ в подынтегральном выражении много меньше $G(p)$, и им можно пренебречь. Тогда

$$\delta\mathcal{G}^{-1} = -G^{-2}(p)\,\delta\mathcal{G}(p) = -ie^2G^{-1}(p)\int d^{(l)}(q)\,\frac{d^4q}{(2\pi)^4}.$$

Наконец, применив преобразование (131,11—12), получим

$$\delta\mathcal{G}^{-1}(p) = -\frac{e^2}{4\pi}G^{-1}(p)\int\frac{d(-q^2)}{-q^2} \approx -\frac{e^2}{4\pi}(\gamma p)\ln\frac{\Lambda^2}{p^2},$$

где Λ — вспомогательный верхний предел, расходимость на котором устраняется перенормировкой. Последняя состоит в вычитании того же выражения при $p^2 \approx m^2$, так что окончательно имеем

$$\delta\mathcal{G}^{-1} = \frac{e^2}{4\pi}(\gamma p)\ln\frac{p^2}{m^2}.$$

Это выражение как раз сокращается с разностью $\mathcal{G}^{-1} - G^{-1}$ из (119,11).

Наконец, остановимся на вопросе о причинах, приводящих к необходимости введения конечной «массы фотона» λ при регуляризации интеграла (119,2), тесно связанной с его поведением при $p^2 \to m^2$.

Прежде всего отметим, что сам по себе этот интеграл с $\lambda = 0$ конечен при $p^2 = m^2$ (для устранения несущественной в данном аспекте расходимости на больших k полагаем при этом, что интеграл берется по большой, но конечной области k-пространства). Необходимость же введения λ возникает при вычитании перенормировочного интеграла, который без этого расходился бы при $p^2 = m^2$. Выясним поэтому, как вел бы себя при $p^2 \to m^2$ нерегуляризованный массовый оператор. Поскольку же это поведение существенно зависит от выбора калибровки, рассмотрим общий случай произвольной калибровки (между тем как интеграл (119,2) написан уже при определенном выборе — (119,13)).

Воспользуемся снова преобразованием (105,14). Представив $d^{(l)}$ в виде

$$d^{(l)}(q) = \frac{\delta D^{(l)}}{q^2} = \frac{4\pi}{(q^2)^2}\delta a(q^2), \tag{119,14}$$

будем считать, что δa — вариация функции $a(q^2)$, существенно меняющейся лишь на интервалах $q^2 \sim m^2$ и конечной при $q^2 \approx m^2$. В подынтегральном выражении в правой стороне (105,14) в разности $\mathcal{G}(p) - \mathcal{G}(p-q)$ при малых q оба члена близки и интеграл сходится. Поскольку при малых q

$$\mathcal{G}(p-q) \sim \frac{1}{p^2 - m^2 - 2pq},$$

$\mathcal{G}(p-q)$ можно опустить по сравнению с $\mathcal{G}(p)$ при $q \gg (p^2 - m^2)/m$. Интеграл же

$$\delta\mathcal{G}(p) = ie^2\mathcal{G}(p)\int d^{(l)}(q)\frac{d^4q}{(2\pi)^4} = -\frac{e^2}{4\pi}\mathcal{G}(p)\int \delta a(q^2)\frac{d(-q^2)}{-q^2}$$

логарифмически расходится в области

$$(p^2 - m^2)^2/m^2 \ll q^2 \ll m^2.$$

С логарифмической точностью имеем поэтому

$$\frac{\delta\mathcal{G}}{\mathcal{G}} = -\frac{e^2}{2\pi}\delta a(m^2)\ln\frac{m^2}{p^2 - m^2}.$$

Это равенство можно проинтегрировать. Заметив, что при $\alpha \equiv e^2 \to 0$ точный пропагатор $\mathcal{G}$ должен совпадать с пропагатором свободных частиц G, получим

$$\mathcal{G}(p) = \frac{1}{\gamma p - m}\left(\frac{m^2}{p^2 - m^2}\right)^{\frac{\alpha}{2\pi}(C - a_0)}, \tag{119,15}$$

где $a_0 = a(m^2)$, C — некоторая постоянная. Для определения последней сравним выражение

$$\mathcal{G}^{-1}(p) = (\gamma p - m)\left[1 + \frac{\alpha}{2\pi}(C - a_0)\ln\rho\right], \tag{119,16}$$

получающееся из (119,15) в первом приближении по α, с аналогичным выражением, получающимся из интеграла (119,2) при $\lambda = 0$[1]):

$$\mathcal{G}^{-1}(p) = (\gamma p - m)\left[1 + \frac{\alpha}{\pi}\ln\rho\right]. \tag{119,17}$$

Согласно определению (119,14) функция $a(q^2)$ совпадает с отношением $D^{(l)}/D$. Поэтому калибровка (119,13), к которой относится (119,17), отвечает $a = a_0 = 1$. Потребовав совпадения (119,16) и (119,17) при этом значении a_0, получим $C = 3$.

---

[1]) Чтобы получить (119,17), нет необходимости производить вычисления заново. Член $\sim\ln\rho$ в (119,9) как раз и получен в предположении $\rho \gg \lambda$, допускающем переход $\lambda \to 0$. Член же $\sim\ln(\lambda/m)$ возникает из-за вычитания перенормировочного интеграла и в исходном интеграле (119,2) отсутствует. Это вычитание не затрагивает, как легко видеть, членов $\sim\ln\rho$.

Таким образом, окончательно находим следующее предельное выражение (*инфракрасную асимптотику*) неперенормированного электронного пропагатора при $p^2 \to m^2$:

$$\mathscr{G}(p) = \frac{\gamma p + m}{p^2 - m^2} \left(\frac{m^2}{p^2 - m^2} \right)^{\frac{\alpha}{2\pi}(3 - a_0)} \tag{119,18}$$

(*А. А. Абрикосов*, 1955). Подчеркнем, что справедливость этой формулы связана лишь с неравенствами $\alpha \ll 1$, $|\ln \rho| \gg 1$, между тем как формулы теории возмущений требовали бы также и условия $\alpha |\ln \rho| / 2\pi \ll 1$. Отметим также, что знак разности $p^2 - m^2$ здесь не существен, так как мнимая часть выражения (119,18) все равно находилась бы за пределами его точности.

Перенормированный пропагатор должен иметь при $p^2 = m^2$ простой полюс. Мы видим, что (119,18) удовлетворяет этому требованию только в калибровке, в которой

$$D^{(l)} = 3D \tag{119,19}$$

(так что $a_0 = 3$). В этом случае регуляризация интеграла Фейнмана (имеющая целью устранить его расходимость на верхних пределах) не будет требовать введения конечной «массы фотона». В других же калибровках нулевая масса фотона приводит к возникновению при $p^2 = m^2$ точки ветвления вместо простого полюса, и устранение этого «дефекта» требует введения конечного параметра λ.

§ 120. Испускание мягких фотонов с ненулевой массой

При вычислении электронных формфакторов в § 117 мы столкнулись с расходимостью интегралов на малых частотах виртуальных фотонов. Эта расходимость тесно связана с обсуждавшейся уже в § 98 инфракрасной катастрофой. Там было указано, что сечение любого процесса с участием заряженных частиц (в том числе рассеяния электрона внешним полем, изображаемого диаграммой вида (117,1)) имеет смысл не само по себе, а лишь при учете одновременного излучения любого числа мягких фотонов. Как будет подробно объяснено ниже (см. § 122), в суммарном сечении, учитывающем излучение мягких фотонов, все расходимости сокращаются. При этом, разумеется, для получения правильного результата предварительное «обрезание» расходящихся интегралов во всех складываемых сечениях должно производиться одинаковым образом.

В § 117 это обрезание было осуществлено путем введения фиктивной конечной массы виртуального фотона λ. Поэтому мы должны теперь видоизменить и полученные в § 98 формулы так, чтобы они описывали излучение мягких «фотонов» с ненулевой массой.