Таким образом, окончательно находим следующее предельное выражение (*инфракрасную асимптотику*) неперенормированного электронного пропагатора при $p^2 \to m^2$:

$$\mathcal{G}(p) = \frac{\gamma p + m}{p^2 - m^2} \left(\frac{m^2}{p^2 - m^2} \right)^{\frac{\alpha}{2\pi}(3 - a_0)} \tag{119,18}$$

(*А. А. Абрикосов*, 1955). Подчеркнем, что справедливость этой формулы связана лишь с неравенствами $\alpha \ll 1$, $|\ln \rho| \gg 1$, между тем как формулы теории возмущений требовали бы также и условия $\alpha |\ln \rho| / 2\pi \ll 1$. Отметим также, что знак разности $p^2 - m^2$ здесь не существен, так как мнимая часть выражения (119,18) все равно находилась бы за пределами его точности.

Перенормированный пропагатор должен иметь при $p^2 = m^2$ простой полюс. Мы видим, что (119,18) удовлетворяет этому требованию только в калибровке, в которой

$$D^{(l)} = 3D \tag{119,19}$$

(так что $a_0 = 3$). В этом случае регуляризация интеграла Фейнмана (имеющая целью устранить его расходимость на верхних пределах) не будет требовать введения конечной «массы фотона». В других же калибровках нулевая масса фотона приводит к возникновению при $p^2 = m^2$ точки ветвления вместо простого полюса, и устранение этого «дефекта» требует введения конечного параметра λ.

§ 120. Испускание мягких фотонов с ненулевой массой

При вычислении электронных формфакторов в § 117 мы столкнулись с расходимостью интегралов на малых частотах виртуальных фотонов. Эта расходимость тесно связана с обсуждавшейся уже в § 98 инфракрасной катастрофой. Там было указано, что сечение любого процесса с участием заряженных частиц (в том числе рассеяния электрона внешним полем, изображаемого диаграммой вида (117,1)) имеет смысл не само по себе, а лишь при учете одновременного излучения любого числа мягких фотонов. Как будет подробно объяснено ниже (см. § 122), в суммарном сечении, учитывающем излучение мягких фотонов, все расходимости сокращаются. При этом, разумеется, для получения правильного результата предварительное «обрезание» расходящихся интегралов во всех складываемых сечениях должно производиться одинаковым образом.

В § 117 это обрезание было осуществлено путем введения фиктивной конечной массы виртуального фотона λ. Поэтому мы должны теперь видоизменить и полученные в § 98 формулы так, чтобы они описывали излучение мягких «фотонов» с ненулевой массой.

С формальной точки зрения такой фотон относится к «векторным» частицам со спином 1, свободное поле которых рассматривалось в § 14. Оно описывается 4-векторным ψ-оператором

$$\hat{\psi}_\mu = \sqrt{4\pi}\sum_{\mathbf{k}\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}e_\mu^{(\alpha)}e^{-ikx} + \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^{+}e_\mu^{(\alpha)*}e^{ikx}\right), \quad \alpha = 1, 2, 3 \qquad (120{,}1)$$

(здесь изменены обозначения и нормировка по сравнению с (14,16) с целью приведения в соответствие с фотонным случаем).

Взаимодействие «фотонов» (120,1) с электронами надо описывать лагранжианом того же вида, что и для истинных фотонов:

$$-e\hat{j}^\mu\hat{\psi}_\mu \qquad (120{,}2)$$

(с заменой операторов потенциала $\hat{A}_\mu$ на $\hat{\psi}_\mu$). Тогда амплитуды процессов испускания фотонов конечной массы будут даваться обычными формулами диаграммной техники, с тем лишь отличием, что

$$k^2 = \lambda^2. \qquad (120{,}3)$$

Суммирование же по поляризациям испущенного фотона должно будет производиться по трем независимым поляризациям (двум поперечным и одной продольной) вместо двух у обычного фотона. Это эквивалентно усреднению по матрице плотности неполяризованных частиц

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\lambda^2}\right) \qquad (120{,}4)$$

(ср. (14,15)) с последующим умножением на 3.

Пропагатор «фотонов» с ненулевой массой

$$D_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{k^2-\lambda^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\lambda^2}\right)$$

(ср. (76,18)). Однако в силу калибровочной инвариантности амплитуды реальных процессов рассеяния не зависят от продольной части фотонного пропагатора, и это свойство не связано с конкретным видом его поперечной части. Поэтому второй член в скобках фактически выпадает, и остается выражение того же типа, что и для обычных фотонов:

$$D_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{k^2-\lambda^2}g_{\mu\nu} \qquad (120{,}5)$$

(которым мы и пользовались в § 117, 119).

Обратимся теперь к изучению мягких (в объясненном в § 98 смысле) фотонов.

Произведенный в § 98 вывод формул (98,5—6) переносится на рассматриваемый случай с тем лишь изменением, что при раскрытии квадратов $(p \pm k^2)$ в знаменателях электронных пропагаторов прибавляется член $k^2 = \lambda^2$. В результате вместо (98,6) получим

$$d\sigma = d\sigma_{\text{упр}} \cdot e^2 \left| \frac{(p'e)}{(p'k) + \lambda^2/2} - \frac{(pe)}{(pk) - \lambda^2/2} \right|^2 \frac{d^3k}{4\pi^2\omega},$$

где $d\sigma_{\text{упр}}$ — сечение того же процесса без излучения мягкого фотона (который называем условно «упругим» процессом). В дальнейшем при интегрированиях по d^3k будут существенны значения $|\mathbf{k}| \sim \lambda$. При этом $p'k \sim pk \gg \lambda^2$, так что членами λ^2 в знаменателях можно пренебречь. Суммирование по поляризациям фотона осуществляется, как указано, с помощью (120,4). После сделанного пренебрежения второй член в (120,4) не дает вклада в сечение, и остается[1])

$$d\sigma = - d\sigma_{\text{упр}} \cdot e^2 \left(\frac{p'}{(p'k)} - \frac{p}{(pk)} \right)^2 \frac{d^3k}{4\pi^2\omega}. \tag{120,6}$$

Таким образом, мы возвращаемся к формуле (98,7), в которой, однако, надо понимать теперь ω как

$$\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda^2}. \tag{120,7}$$

Формула (120,6) имеет совершенно общий характер. Она применима как при упругом, так и при неупругом рассеянии и даже при изменении сорта частиц. Результат же дальнейшего интегрирования по d^3k зависит от 4-векторов p и p', иными словами, от характера основного процесса рассеяния.

Рассмотрим случай упругого рассеяния, когда

$$|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|, \quad \varepsilon = \varepsilon',$$

и определим полную вероятность испускания фотонов с частотой, меньшей некоторого $\omega_{\max}$; при этом предполагается, что

$$\omega_{\max} \gg \lambda, \tag{120,8}$$

а сверху значение $\omega_{\max}$ ограничено условиями применимости теории излучения мягких фотонов (98,9—10).

Вычислим прежде всего интеграл по d^3k в нерелятивистском пределе. При $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| \ll m$ имеем

$$\left(\frac{p'}{(p'k)} - \frac{p}{(pk)} \right)^2 \approx \frac{(\mathbf{qk})^2}{m^2\omega^4} - \frac{\mathbf{q}^2}{m^2\omega^2}$$

[1]) На первый взгляд могло бы возникнуть сомнение в допустимости пренебрежения λ^2 до усреднения ввиду наличия λ^2 в знаменателе второго члена в (120,4). Однако легко непосредственно убедиться в том, что этот член при усреднении дает вклад $\sim\lambda^4 \cdot \lambda^{-2}$, которым можно пренебречь.

$(\mathbf{q}=\mathbf{p}'-\mathbf{p})$. Интегрирование этого выражения по направлениям $\mathbf{k}$ дает

$$\frac{4\pi \mathbf{q}^2}{m^2\omega^2}\left(\frac{\mathbf{k}^2}{3\omega^2}-1\right).$$

После этого имеем из (120,6)

$$d\sigma = d\sigma_{\text{упр}}\cdot\frac{e^2\mathbf{q}^2}{\pi m^2}\int\limits_0^{\omega=\omega_{\max}}\left[1-\frac{\mathbf{k}^2}{3(\mathbf{k}^2+\lambda^2)}\right]\frac{\mathbf{k}^2 d|\mathbf{k}|}{(\mathbf{k}^2+\lambda^2)^{3/2}},$$

или, произведя интегрирование в предположении $\omega_{\max}/\lambda \gg 1$,

$$d\sigma = d\sigma_{\text{упр}}\cdot\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\left(\ln\frac{2\omega_{\max}}{\lambda}-\frac{5}{6}\right),\qquad \mathbf{q}^2 \ll m^2. \tag{120,9}$$

В общем релятивистском случае для вычисления интеграла воспользуемся формулой (131,4). С ее помощью имеем для интеграла по углам

$$I=\int\frac{do_{\mathbf{k}}}{(pk)(p'k)}=\int\limits_0^1 dx\int\frac{do_{\mathbf{k}}}{[(pk)x+(p'k)(1-x)]^2},$$

или, раскрыв скалярные произведения с $p=(\varepsilon,\mathbf{p})$, $p'=(\varepsilon,\mathbf{p}')$,

$$I=\int\limits_0^1 dx\int\frac{do_{\mathbf{k}}}{\{\varepsilon\omega-\mathbf{k}[\mathbf{p}x+\mathbf{p}'(1-x)]\}^2}.$$

Интеграл $do_{\mathbf{k}}$ легко вычисляется в сферических координатах с полярной осью вдоль вектора $\mathbf{p}x+\mathbf{p}'(1-x)$, после чего

$$I=\int\limits_0^1\frac{4\pi\,dx}{(\varepsilon\omega)^2-[\mathbf{p}x+\mathbf{p}'(1-x)]^2\mathbf{k}^2}=\int\limits_0^1\frac{4\pi\,dx}{[m^2+\mathbf{q}^2x(1-x)]\mathbf{k}^2+\varepsilon^2\lambda^2}.$$

Два других интеграла (с $(pk)^2$ и $(p'k)^2$ в знаменателях) получаются отсюда при $\mathbf{q}=0$. Заметив также, что

$$pp'=\varepsilon^2-\mathbf{p}\mathbf{p}'=m^2+{}^1/_2\mathbf{q}^2,$$

получим

$$d\sigma=\frac{2e^2}{\pi}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\omega_{\max}}\frac{\mathbf{k}^2 d|\mathbf{k}|}{\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2}}\left\{\frac{m^2+\mathbf{q}^2/2}{[m^2+\mathbf{q}^2x(1-x)]\mathbf{k}^2+\varepsilon^2\lambda^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{m^2}{m^2\mathbf{k}^2+\varepsilon^2\lambda^2}\right\}d\sigma_{\text{упр}}. \tag{120,10}$$

Интегрирование по $d|\mathbf{k}|$ сводится к вычислению интегралов вида

$$\int_0^{\omega_{max}} \frac{\mathbf{k}^2 d|\mathbf{k}|}{(a\mathbf{k}^2+\lambda^2)\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2}} =$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{\omega_{max}} \frac{d|\mathbf{k}|}{\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2}} - \frac{\lambda^2}{a}\int_0^{\omega_{max}} \frac{d|\mathbf{k}|}{(a\mathbf{k}^2+\lambda^2)\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{a}\ln\frac{2\omega_{max}}{\lambda} - \frac{1}{a}\int_0^{\infty}\frac{dz}{(az^2+1)\sqrt{z^2+1}}.$$

Во втором интеграле подставлено $|\mathbf{k}|\to\lambda z$ и верхний предел (ω_{max}/λ) заменен на ∞, что допустимо ввиду сходимости интеграла.

Возникающие затем интегралы по x в (120,10) не могут быть полностью выражены через элементарные функции. Результат представим в виде

$$d\sigma = \alpha\left[F\left(\frac{|\mathbf{q}|}{2m}\right)\ln\frac{2\omega_{max}}{\lambda} + F_1\right]d\sigma_{упр}, \tag{120,11}$$

где[1])

$$F(\xi) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{2\xi^2+1}{\xi\sqrt{\xi^2+1}}\ln\left(\xi+\sqrt{\xi^2+1}\right) - 1\right], \tag{120,12}$$

$$F_1 = \frac{2\varepsilon}{\pi|\mathbf{p}|}\ln\frac{\varepsilon+|\mathbf{p}|}{m} - \frac{2m^2+\mathbf{q}^2}{\pi\varepsilon^2}\int_0^1\frac{dx}{a\sqrt{1-a}}\ln\frac{1+\sqrt{1-a}}{\sqrt{a}}, \tag{120,13}$$

$$a = \frac{1}{\varepsilon^2}\left[m^2+\mathbf{q}^2x(1-x)\right].$$

Найдем асимптотическое выражение для сечения в ультрарелятивистском случае. При этом предполагается, что не только $\varepsilon \gg m$, но и $|\mathbf{q}| \gg m$, т. е. угол рассеяния не слишком мал. В этих условиях в интеграле (120,13) существенна область значений x, в которой $a \ll 1$; после соответствующих пренебрежений

$$F_1 \approx \frac{\mathbf{q}^2}{2\pi\varepsilon^2}\int\frac{\ln a}{a}dx \approx \frac{1}{2\pi}\int\frac{\ln(\mathbf{q}^2/\varepsilon^2)+\ln x+\ln(1-x)}{x(1-x)}dx.$$

[1]) Функция $F(\xi)$ уже встречалась в задачах к § 98. Это неудивительно, так как с логарифмической точностью (120,11) можно получить, интегрируя сечение испускания фотонов нулевой массы (98,8) по ω в пределах от λ до ω_{max}. Если ввести вместо ξ переменную θ согласно $\xi = \operatorname{sh}(\theta/2)$, то

$$F(\theta) = \frac{2}{\pi}(\theta\operatorname{cth}\theta - 1). \tag{120,12a}$$

Интеграл надо обрезать при $a \sim \frac{m^2}{\varepsilon^2}$, т. е. при $x \sim m^2/\mathbf{q}^2$ снизу и при $1 - x \sim m^2/\mathbf{q}^2$ сверху. Тогда

$$F_1 \approx \frac{1}{2\pi}\left[2\ln\frac{\mathbf{q}^2}{\varepsilon^2}\ln\frac{\mathbf{q}^2}{m^2} - \ln^2\frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\ln^2\frac{\mathbf{q}^2}{m^2} - 4\ln\frac{\varepsilon}{m}\ln\frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\right].$$

Эта формула справедлива с точностью до квадратов логарифмов, как говорят, с *дважды логарифмической* точностью. С этой же точностью достаточно положить в первом члене в (120,11)

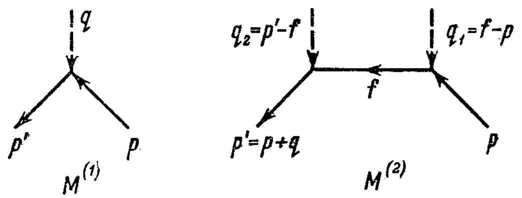
$$F(\xi) \approx \frac{4}{\pi}\ln\xi, \qquad \xi \gg 1.$$

Окончательно

$$d\sigma = \frac{2\alpha}{\pi}\left[\ln\frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\ln\frac{\omega_{\max}}{\lambda} - \ln\frac{\varepsilon}{m}\ln\frac{\mathbf{q}^2}{m^2} + \frac{1}{4}\ln^2\frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\right]d\sigma_{\text{упр}}, \qquad \mathbf{q}^2 \gg m^2. \tag{120,14}$$

§ 121. Рассеяние электрона во внешнем поле во втором борновском приближении

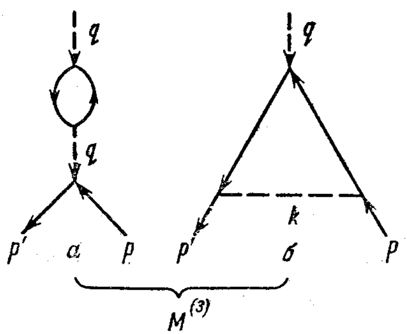
В первых двух приближениях по внешнему полю рассеяние электрона изображается диаграммами



(121,1)

Первой из них отвечает амплитуда $M^{(1)} \sim Ze^2$, рассмотренная в § 80. Амплитуда же второго приближения $M^{(2)} \sim (Ze^2)^2$.

Легко видеть, что члены такого же порядка возникают и от радиационных поправок. В третьем порядке теории возмущений радиационные поправки к амплитуде рассеяния изображаются диаграммами



(121,2)