Интеграл надо обрезать при $a \sim \frac{m^2}{\varepsilon^2}$, т. е. при $x \sim m^2/\mathbf{q}^2$ снизу и при $1 - x \sim m^2/\mathbf{q}^2$ сверху. Тогда

$$F_1 \approx \frac{1}{2\pi}\left[2\ln\frac{\mathbf{q}^2}{\varepsilon^2}\ln\frac{\mathbf{q}^2}{m^2} - \ln^2\frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\ln^2\frac{\mathbf{q}^2}{m^2} - 4\ln\frac{\varepsilon}{m}\ln\frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\right].$$

Эта формула справедлива с точностью до квадратов логарифмов, как говорят, с *дважды логарифмической* точностью. С этой же точностью достаточно положить в первом члене в (120,11)

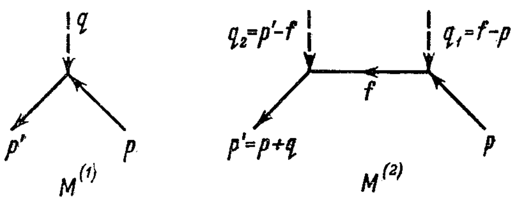
$$F(\xi) \approx \frac{4}{\pi}\ln\xi, \qquad \xi \gg 1.$$

Окончательно

$$d\sigma = \frac{2\alpha}{\pi}\left[\ln\frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\ln\frac{\omega_{max}}{\lambda} - \ln\frac{\varepsilon}{m}\ln\frac{\mathbf{q}^2}{m^2} + \frac{1}{4}\ln^2\frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\right]d\sigma_{\text{упр}}, \qquad \mathbf{q}^2 \gg m^2. \tag{120,14}$$

§ 121. Рассеяние электрона во внешнем поле во втором борновском приближении

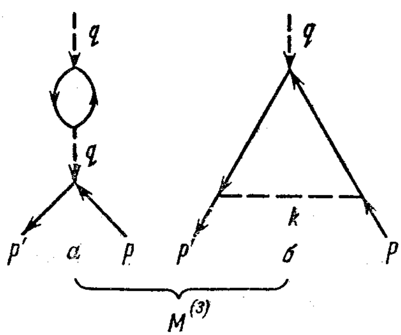
В первых двух приближениях по внешнему полю рассеяние электрона изображается диаграммами



(121,1)

Первой из них отвечает амплитуда $M^{(1)} \sim Ze^2$, рассмотренная в § 80. Амплитуда же второго приближения $M^{(2)} \sim (Ze^2)^2$.

Легко видеть, что члены такого же порядка возникают и от радиационных поправок. В третьем порядке теории возмущений радиационные поправки к амплитуде рассеяния изображаются диаграммами



(121,2)

При этом $M^{(3)} \sim Ze^2 \cdot e^2$, и если $Z \sim 1$, то $M^{(3)} \sim M^{(2)}$. Согласно (64,26) сечение рассеяния

$$d\sigma = |M_{fi}^{(1)} + M_{fi}^{(2)} + M_{fi}^{(3)}|^2 \frac{do'}{16\pi^2}. \tag{121,3}$$

В стоящем здесь квадрате амплитуды мы имеем право сохранить, наряду с $|M_{fi}^{(1)}|^2$, также и интерференционные члены между $M_{fi}^{(1)}$ и $M_{fi}^{(2)}$ и между $M_{fi}^{(1)}$ и $M_{fi}^{(3)}$. Таким образом, с точностью до членов $\sim e^6$ сечение представится суммой

$$d\sigma = d\sigma^{(1)} + d\sigma^{(2)} + d\sigma_{\text{рад}}, \tag{121,4}$$

где $d\sigma^{(1)}$ — сечение в первом борновском приближении (см. § 80), а поправки к нему

$$\begin{aligned} d\sigma^{(2)} &= 2\,\mathrm{Re}\, M_{fi}^{(1)} M_{fi}^{(2)*} \frac{do'}{16\pi^2}, \\ d\sigma_{\text{рад}} &= 2\,\mathrm{Re}\, M_{fi}^{(1)} M_{fi}^{(3)*} \frac{do'}{16\pi^2}. \end{aligned} \tag{121,5}$$

Напомним (см. § 80), что

$$M_{fi}^{(1)} = |e|(\bar{u}'\gamma^0 u)\,\Phi(\mathbf{q}), \tag{121,6}$$

где $\Phi(\mathbf{q})$ — компонента Фурье скалярного потенциала постоянного внешнего поля $\left(\Phi \equiv A_0^{(e)}\right)$ и учтено, что заряд электрона $e = -|e|$.

Два выражения (121,5) могут, очевидно, вычисляться независимо. Первое будет рассмотрено в этом, а второе — в следующем параграфе.

Амплитуда второго приближения, построенная по диаграмме (121,1), дается интегралом [1])

$$M_{fi}^{(2)} = -e^2 \int \left\{ \bar{u}(p')\,\gamma^0 \frac{\gamma f + m}{f^2 - m^2 + i0}\,\gamma^0 u(p) \right\} \Phi(\mathbf{p}' - \mathbf{f})\,\Phi(\mathbf{f} - \mathbf{p}) \frac{d^3 f}{(2\pi)^3}. \tag{121,7}$$

«4-импульсы» внешнего постоянного поля $q_1 = f - p$ и $q_2 = p' - f$ не имеют временных компонент. Поэтому

$$f_0 = \varepsilon = \varepsilon', \tag{121,8}$$

где ε и ε' — начальная и конечная энергии электрона, совпадающие друг с другом при упругом рассеянии.

В чисто кулоновом поле неподвижного заряда $Z|e|$:

$$\Phi(\mathbf{q}) = \frac{4\pi Z|e|}{\mathbf{q}^2}.$$

[1]) Напомним, что здесь надо пользоваться правилом диаграммной техники, относящимся к постоянному внешнему полю, — см. сформулированное в § 77 правило 8.

Для такого потенциала интеграл (121,7) логарифмически расходится (при $\mathbf{f} \approx \mathbf{p}$ и $\mathbf{f} \approx \mathbf{p}'$). Эта расходимость специфична для кулонова поля и связана с медленностью его убывания на больших расстояниях. Ее происхождение легче всего уяснить на примере нерелятивистского случая. Согласно III (135,8) коэффициент при сферической волне $\exp(i|\mathbf{p}|r)/r$ в асимптотическом выражении волновой функции электрона в кулоновом поле имеет вид

$$f(\theta)\exp\left(-i\frac{Z\alpha m}{|\mathbf{p}|}\ln|\mathbf{p}|r\right).$$

Но этот коэффициент и является амплитудой рассеяния электрона в поле, и мы видим, что ее фаза содержит расходящийся (при $r\to\infty$) член. При разложении амплитуды рассеяния по степеням $Z\alpha$ этот член приведет к расходимости всех членов разложения, начиная со второго (так как сама функция $f(\theta)$ пропорциональна $Z\alpha$). Ситуация в релятивистском случае имеет, разумеется, аналогичный характер.

Эти рассуждения показывают в то же время, что расходящиеся члены должны сократиться при вычислении сечения рассеяния, в котором фаза амплитуды несущественна. Простейший путь корректного проведения вычислений состоит в том, чтобы рассмотреть сначала рассеяние в экранированном кулоновом поле, т. е. положить

$$\Phi(q) = \frac{4\pi Z|e|}{\mathbf{q}^2+\delta^2} \tag{121,9}$$

с малой константой экранирования δ ($\delta \ll |\mathbf{p}|$). Тем самым устраняется расходимость в амплитуде рассеяния, а в окончательном ответе для сечения уже можно положить $\delta = 0$.

Подставив (121,9) в (121,7), получим

$$M_{fi}^{(2)} = -\frac{2}{\pi}Z^2\alpha^2\bar{u}(p')\left[\gamma^0\varepsilon+m)J_1+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{J}\right]u(p),$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int\frac{d^3f}{[(\mathbf{p}'-\mathbf{f})^2+\delta^2]\,[(\mathbf{f}-\mathbf{p})^2+\delta^2]\,[\mathbf{p}^2-\mathbf{f}^2+i0]}, \\ \mathbf{J} &= \int\frac{\mathbf{f}d^3f}{[(\mathbf{p}'-\mathbf{f})^2+\delta^2]\,[(\mathbf{f}-\mathbf{p})^2+\delta^2]\,[\mathbf{p}^2-\mathbf{f}^2+i0)} \equiv \frac{\mathbf{p}+\mathbf{p}'}{2}J_2. \end{aligned} \tag{121,10}$$

Здесь $\mathbf{p}^2 = \varepsilon^2 - m^2 = \mathbf{p}'^2$ и интеграл $\mathbf{J}$ симметричен по отношению к $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$; из соображений векторной симметрии очевидно, что вектор $\mathbf{J}$ должен быть направлен вдоль $\mathbf{p}+\mathbf{p}'$. Исключив теперь матрицы $\boldsymbol{\gamma}$ с помощью равенств

$$\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}u = (\gamma^0\varepsilon - m)u, \qquad \bar{u}'\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}' = \bar{u}'(\gamma^0\varepsilon - m),$$

получим

$$M_{fi}^{(2)} = -\frac{2}{\pi} Z^2\alpha^2 \bar{u}(p')\left[\gamma^0\varepsilon(J_1+J_2)+m(J_1-J_2)\right]u(p). \quad (121{,}11)$$

Для проведения дальнейших вычислений перейдем (как и в § 80) от биспинорных амплитуд u и u' к соответствующим им (согласно (23,9) и (23,11)) 3-спинорам w и w'. Прямым перемножением находим

$$\bar{u}'u = w'^*\{(\varepsilon+m)-(\varepsilon-m)\cos\theta+i\boldsymbol{\nu\sigma}(\varepsilon-m)\sin\theta\}w,$$

$$\bar{u}'\gamma^0 u = w'^*\{(\varepsilon+m)+(\varepsilon-m)\cos\theta-i\boldsymbol{\nu\sigma}(\varepsilon-m)\sin\theta\}w,$$

где

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{[\mathbf{nn}']}{\sin\theta}, \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \qquad \mathbf{n}' = \frac{\mathbf{p}'}{|\mathbf{p}'|}, \qquad \cos\theta = \mathbf{nn}'.$$

После этого амплитуда (121,11) представится в виде [1])

$$M_{fi}^{(2)} = 4\pi w'^*\left(A^{(2)}+B^{(2)}\boldsymbol{\nu\sigma}\right)w,$$

$$A^{(2)} = -\frac{1}{2\pi^2}Z^2\alpha^2\{[(\varepsilon+m)+(\varepsilon-m)\cos\theta]\,\varepsilon(J_1+J_2)+$$
$$+[(\varepsilon+m)-(\varepsilon-m)\cos\theta]\,m(J_1-J_2)\}, \quad (121{,}12)$$

$$B^{(2)} = \frac{i}{2\pi^2}Z^2\alpha^2(\varepsilon-m)\sin\theta\,[\varepsilon(J_1+J_2)-m(J_1-J_2)].$$

Амплитуда же рассеяния первого приближения в аналогичных обозначениях имеет вид

$$M_{fi}^{(1)} = 4\pi w'^*\left(A^{(1)}+B^{(1)}\boldsymbol{\nu\sigma}\right)w,$$

$$A^{(1)} = \frac{Z\alpha}{\mathbf{q}^2}[(\varepsilon+m)+(\varepsilon-m)\cos\theta], \quad (121{,}13)$$

$$B^{(1)} = -i\frac{Z\alpha}{\mathbf{q}^2}(\varepsilon-m)\sin\theta,$$

где $\mathbf{q}=\mathbf{p}'-\mathbf{p}$.

Сечение рассеяния и поляризационные эффекты выражаются через величины $A = A^{(1)}+A^{(2)}$ и $B = B^{(1)}+B^{(2)}$ формулами, полученными в III, § 140. Так, сечение рассеяния неполяризованных электронов:

$$d\sigma = (|A|^2+|B|^2)\,do' \approx d\sigma^{(1)} + 2\left(A^{(1)}\operatorname{Re}A^{(2)} - iB^{(1)}\operatorname{Im}B^{(2)}\right)do'.$$

После подстановки (121,12—13) простое вычисление дает

$$d\sigma^{(2)} = -do'\frac{Z^3\alpha^3\varepsilon^3}{\pi^2\mathbf{p}^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\left[\left(1-\mathbf{v}^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{Re}(J_1+J_2)+\right.$$
$$\left.+\frac{m^2}{\varepsilon^2}\operatorname{Re}(J_1-J_2)\right], \quad (121{,}14)$$

[1]) Определение величин A и B здесь соответствует определению в § 37 и в III, § 140 и отличается множителем от определения в § 80.

где $\mathbf{v} = \mathbf{p}/\varepsilon$ — скорость электрона, θ — угол рассеяния. В результате рассеяния электроны поляризуются, вектор поляризации конечных электронов

$$\zeta' = \frac{2\,\mathrm{Re}\,(AB^*)}{|A|^2 + |B|^2}\mathbf{v} \approx \frac{2\left(A^{(1)}\,\mathrm{Re}\,B^{(2)} - iB^{(1)}\,\mathrm{Im}\,A^{(2)}\right)}{|A^{(1)}|^2 + |B^{(1)}|^2}\mathbf{v},$$

или, после подстановки (121,12—13),

$$\zeta' = \frac{4Z\alpha m\mathbf{p}^4}{\pi^2\varepsilon^2}\,\frac{\sin^3(\theta/2)\cos(\theta/2)}{1 - v^2\sin^2(\theta/2)}\,\mathrm{Im}\,(J_1 - J_2)\,\mathbf{v}. \qquad (121,15)$$

Перейдем к вычислению интегралов J_1 и J_2. Оно облегчается применением метода параметризации по формуле (131,2). Интеграл J_1 принимает вид

$$J_1 = -2\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int \frac{d^3f\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 \cdot \delta(1 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3)}{\{[(\mathbf{p}' - \mathbf{f})^2 + \delta^2]\,\xi_1 + [(\mathbf{p} - \mathbf{f})^2 + \delta^2]\,\xi_2 + [\mathbf{f}^2 - \mathbf{p}^2 - i0]\,\xi_3\}^3}.$$

Интегрирование по ξ_3 устраняет δ-функцию; приведя подобные члены в знаменателе, получим

$$J_1 = -2\int_0^1\int_0^{1-\xi_2}\int \frac{d^3f\, d\xi_1\, d\xi_2}{\{\delta^2(\xi_1 + \xi_2) + \mathbf{p}^2(2\xi_1 + 2\xi_2 - 1) - 2\mathbf{f}(\xi_1\mathbf{p}' + \xi_2\mathbf{p}) + \mathbf{f}^2 - i0\}^3}.$$

Введя вместо $\mathbf{f}$ новую переменную $\mathbf{k} = \mathbf{f} - \xi_1\mathbf{p}' - \xi_2\mathbf{p}$, сведем интегрирование по d^3f к интегралу вида

$$\int \frac{d^3k}{(\mathbf{k}^2 - a^2 - i0)^3} = i\,\frac{\pi^2}{4a^3},$$

так что

$$J_1 = -\frac{i\pi^2}{2}\times$$
$$\times\int_0^1\int_0^{1-\xi_2} \frac{d\xi_1\, d\xi_2}{\left\{\mathbf{p}^2\left\{\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_1 - 2\xi_2 + 1\right) + 2\xi_1\xi_2\mathbf{p}\mathbf{p}' - \delta^2(\xi_1 + \xi_2) - i0\right\}^{3/2}}.$$

Вместо ξ_1 и ξ_2 вводим симметричные комбинации: $x = \xi_1 + \xi_2$, $y = \xi_1 - \xi_2$. Интегрирование по y (в пределах от 0 до x) элементарно и дает

$$J_1 = -\frac{i\pi^2}{2|\mathbf{p}|^3}\int_0^1 \frac{x\,dx}{\left[bx^2 - 2x + 1 - \frac{\delta^2}{\mathbf{p}^2}x - i0\right]\left[(1 - x)^2 - \frac{\delta^2}{\mathbf{p}^2}x - i0\right]^{1/2}},$$

где $b = \dfrac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}\mathbf{p}'}{2\mathbf{p}^2} = \cos^2\dfrac{\theta}{2}$.

Для вычисления интеграла по x при $\delta \to 0$ разбиваем область интегрирования на две части:

$$\int_0^1 \ldots dx = \int_0^{1-\delta_1} \ldots dx + \int_{1-\delta_1}^1 \ldots dx, \qquad 1 \gg \delta_1 \gg \frac{\delta}{|\mathbf{p}|}.$$

В первом интеграле можно положить $\delta = 0$; тогда [1])

$$\int_0^{1-\delta_1} \ldots dx = \frac{1}{2(1-b)} \ln \frac{(1-x)^2}{bx^2 - 2x + 1 - i0}\Bigg|_0^{1-\delta_1} = \frac{1}{2(1-b)}\left[\ln \frac{\delta_1^2}{1-b} + i\pi\right].$$

Во втором же интеграле можно положить $x = 1$ везде, кроме члена $(1-x)^2$, а также положить $\delta = 0$ в первых скобках знаменателя. Тогда [2])

$$\int_{1-\delta_1}^1 \ldots dx = -\frac{1}{1-b}\int_0^{\delta_1} \frac{dx'}{\left(x'^2 - \frac{\delta^2}{\mathbf{p}^2} - i0\right)^{1/2}} =$$

$$= -\frac{1}{1-b}\left[\int_{\delta/|\mathbf{p}|}^{\delta_1} \frac{dx'}{\left(x'^2 - \frac{\delta^2}{\mathbf{p}^2}\right)^{1/2}} + i\int_0^{\delta/|\mathbf{p}|} \frac{dx'}{\left(\frac{\delta^2}{\mathbf{p}^2} - x'^2\right)^{1/2}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{1-b}\left[\ln \frac{2|\mathbf{p}|\delta_1}{\delta} + i\frac{\pi}{2}\right].$$

При сложении обоих интегралов величина δ_1, как и следовало ожидать, выпадает, и получается

$$J_1 = \frac{i\pi^2}{2|\mathbf{p}|^3 \sin^2(\theta/2)} - \ln\left(\frac{2|\mathbf{p}|}{\delta} \sin\frac{\theta}{2}\right). \tag{121,16}$$

Интеграл J_2 вычисляется аналогичным образом и равен

$$J_2 = J_1 - \frac{\pi^3\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\right)}{4|\mathbf{p}|^3 \cos^2\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{i\pi^2}{2|\mathbf{p}|^3\cos^2\frac{\theta}{2}} \ln \sin\frac{\theta}{2}. \tag{121,17}$$

---

[1]) Правило обхода (член $i0$) позволяет определить изменение аргумента выражения под знаком логарифма при переходе от 0 к $1-\delta_1$: при обходе точки ветвления снизу аргумент меняется от 0 до $-\pi$.

[2]) И здесь правило обхода определяет знак корня при переходе от положительных к отрицательным значениям подкоренного выражения.

Остается подставить эти выражения в (121,14—15), и мы получим окончательные результаты:

$$d\sigma^{(2)} = \frac{\pi (Z\alpha)^3 \varepsilon}{4|\mathbf{p}|^3 \sin\frac{\theta}{2}} \left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\right) do', \qquad (121{,}18)$$

$$\zeta' = \frac{2Z\alpha m|\mathbf{p}|}{\varepsilon^2} \frac{\sin^3\frac{\theta}{2} \ln \sin\frac{\theta}{2}}{\left(1 - v^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}} \boldsymbol{\nu} \qquad (121{,}19)$$

(*W. A. McKinley*, *H. Feshbach*, 1948; *R. H. Dalitz*, 1950).

В первом борновском приближении сечения рассеяния электрона и позитрона (в одном и том же внешнем поле) одинаковы. Во втором приближении эта симметрия исчезает. Для рассеяния позитрона (заряд $+|e|$) амплитуда первого приближения (121,6) имеет обратный знак, знак же $M_{fi}^{(2)}$ не меняется. Поэтому сечение $d\sigma^{(2)}$, представляющее собой интерференционный член между $M_{fi}^{(1)}$ и $M_{fi}^{(2)}$, изменит знак. То же самое произойдет и с выражением (121,19) для вектора поляризации. Вообще, переход от формул для рассеяния электрона к формулам для рассеяния позитрона можно произвести формальной заменой $Z \to -Z$.

§ 122. Радиационные поправки к рассеянию электрона во внешнем поле

Перейдем к вычислению радиационных поправок к рассеянию электрона во внешнем поле (*J. Schwinger*, 1949).

Соответствующая часть амплитуды рассеяния изображается двумя диаграммами (121,2). Диаграмма *а*) дает в амплитуду вклад

$$-(\bar{u}'\gamma^0 u)\frac{\mathscr{P}(-\mathbf{q}^2)}{4\pi} D(-\mathbf{q}^2)\cdot e\Phi(\mathbf{q}),$$

где $\mathscr{P}(-\mathbf{q}^2)$ — поляризационный оператор, отвечающий петле в диаграмме. Вклад диаграммы *б*):

$$-(\bar{u}'\Lambda^0 u)e\Phi(\mathbf{q}),$$

где Λ^0 — поправочный член в вершинном операторе ($\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \Lambda^\mu$); согласно (116,6)

$$\Lambda^0 = \gamma^0[f(-\mathbf{q}^2) - 1] - \frac{1}{2m}\sigma^{0\nu}q_\nu g(-\mathbf{q}^2).$$