Остается подставить эти выражения в (121,14—15), и мы получим окончательные результаты:

$$d\sigma^{(2)} = \frac{\pi (Z\alpha)^3 \varepsilon}{4|\mathbf{p}|^3 \sin\frac{\theta}{2}} \left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\right) do', \qquad (121,18)$$

$$\boldsymbol{\zeta}' = \frac{2Z\alpha m|\mathbf{p}|}{\varepsilon^2} \frac{\sin^3\frac{\theta}{2} \ln \sin\frac{\theta}{2}}{\left(1 - v^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}} \boldsymbol{\nu} \qquad (121,19)$$

(*W. A. McKinley*, *H. Feshbach*, 1948; *R. H. Dalitz*, 1950).

В первом борновском приближении сечения рассеяния электрона и позитрона (в одном и том же внешнем поле) одинаковы. Во втором приближении эта симметрия исчезает. Для рассеяния позитрона (заряд $+|e|$) амплитуда первого приближения (121,6) имеет обратный знак, знак же $M_{fi}^{(2)}$ не меняется. Поэтому сечение $d\sigma^{(2)}$, представляющее собой интерференционный член между $M_{fi}^{(1)}$ и $M_{fi}^{(2)}$, изменит знак. То же самое произойдет и с выражением (121,19) для вектора поляризации. Вообще, переход от формул для рассеяния электрона к формулам для рассеяния позитрона можно произвести формальной заменой $Z \to -Z$.

§ 122. Радиационные поправки к рассеянию электрона во внешнем поле

Перейдем к вычислению радиационных поправок к рассеянию электрона во внешнем поле (*J. Schwinger*, 1949).

Соответствующая часть амплитуды рассеяния изображается двумя диаграммами (121,2). Диаграмма *а*) дает в амплитуду вклад

$$-(\bar{u}'\gamma^0 u)\frac{\mathcal{P}(-\mathbf{q}^2)}{4\pi} D(-\mathbf{q}^2)\cdot e\Phi(\mathbf{q}),$$

где $\mathcal{P}(-\mathbf{q}^2)$ — поляризационный оператор, отвечающий петле в диаграмме. Вклад диаграммы *б*):

$$-(\bar{u}'\Lambda^0 u)\, e\Phi(\mathbf{q}),$$

где Λ^0 — поправочный член в вершинном операторе ($\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \Lambda^\mu$); согласно (116,6)

$$\Lambda^0 = \gamma^0 [f(-\mathbf{q}^2) - 1] - \frac{1}{2m}\sigma^{0\nu} q_\nu g(-\mathbf{q}^2).$$

Сложив оба вклада, получим [1])

$$M_{fi}^{(3)} = -\left(\bar{u}'\gamma^0 Q_{\text{рад}} u\right) e\Phi(\mathbf{q}),$$
$$Q_{\text{рад}}(\mathbf{q}) = f(-\mathbf{q}^2) - 1 - \frac{1}{\mathbf{q}^2}\mathscr{P}(-\mathbf{q}^2) + \frac{1}{2m} g(-\mathbf{q}^2)\mathbf{q}\gamma. \tag{122,1}$$

Обсудим прежде всего вопрос об инфракрасной расходимости, содержащейся в формфакторе $f(-\mathbf{q}^2)$, а тем самым и в амплитуде рассеяния (122,1).

Уже было указано (см. § 98), что точная амплитуда чисто упругого рассеяния сама по себе равна нулю, т. е. не имеет смысла. Физическим смыслом обладает лишь амплитуда рассеяния, определенного как процесс, в котором может быть испущено любое число мягких фотонов с энергией каждого меньшей некоторого заданного значения $\omega_{\max}$, удовлетворяющего условиям применимости теории излучения мягких фотонов. Другими словами, имеет смысл лишь сумма

$$d\sigma = d\sigma_{\text{упр}} + d\sigma_{\text{упр}} \int_0^{\omega_{\max}} dw_\omega + d\sigma_{\text{упр}} \frac{1}{2!} \int_0^{\omega_{\max}} dw_{\omega_1} \int_0^{\omega_{\max}} dw_{\omega_2} + \ldots, \tag{122,2}$$

где $d\sigma_{\text{упр}}$ — сечение рассеяния без испускания фотонов, dw_ω — дифференциальная вероятность испускания электроном фотона частоты ω. При этом предполагается, что $d\sigma_{\text{упр}}$ само вычисляется в виде ряда теории возмущений, т. е. в виде разложения по степеням α [2]). Тогда после сведения вместе членов каждого порядка по α из всех слагаемых в (122,2) мы получим $d\sigma$ в виде разложения по α, каждый из членов которого будет конечным.

В первом борновском приближении $d\sigma_{\text{упр}} \sim \alpha^2$. Этот член, естественно, имеет смысл сам по себе. Если же мы хотим учесть следующую поправку в $d\sigma_{\text{упр}}$ (член $\sim\alpha^3$), то наряду с ней надо взять также и второй член в сумме (122,2): поскольку $dw_\omega \sim \alpha$, при умножении на $d\sigma_{\text{упр}} \sim \alpha^2$ отсюда тоже возникает величина $\sim\alpha^3$. Покажем, что при сложении этих двух величин инфракрасная расходимость устраняется.

---

[1]) При преобразовании надо помнить, что если $q^\mu = (0, \mathbf{q})$, то $q_\mu = (0, -\mathbf{q})$! Поэтому $\sigma^{0\nu} q_\nu = -\gamma^0 \mathbf{q}\gamma$.

[2]) Что касается вероятности dw_ω, то необходимость учета радиационных поправок в ней зависит от $\omega_{\max}$; предел $\omega \to 0$ отвечает классическому случаю, в котором радиационные поправки исчезают; поэтому выбором достаточно малого $\omega_{\max}$ можно всегда сделать их малыми.

Расходящийся член в формфакторе f согласно (117,17) имеет вид[1]

$$-\frac{\alpha}{2} F\left(\frac{|\mathbf{q}|}{2m}\right) \ln\frac{m}{\lambda}.$$

Соответствующий член в амплитуде (122,1):

$$\frac{\alpha}{2} F \ln\frac{m}{\lambda}\cdot(\bar{u}'\gamma^0 u)\, e\Phi(\mathbf{q}),$$

а в сечении рассеяния (121,5):

$$d\sigma^{\text{инфра}} = -\alpha F \ln\frac{m}{\lambda}\cdot|\bar{u}'\gamma^0 u|^2 |e\Phi(\mathbf{q})|^2 \frac{do'}{16\pi^2}.$$

Сравнив это с борновским сечением

$$d\sigma^{(1)} = |\bar{u}'\gamma^0 u|^2 |e\Phi(\mathbf{q})|^2 \frac{do'}{16\pi^2},$$

найдем, что

$$d\sigma^{\text{инфра}} = -\alpha F \ln\frac{m}{\lambda}\cdot d\sigma^{(1)}. \tag{122,3}$$

С другой стороны, второй член в (122,2) с $\int dw_\omega$ из (120,11) дает

$$d\sigma_{\text{упр}} \int_0^{\omega_{\max}} dw_\omega = \alpha F \ln\frac{2\omega_{\max}}{\lambda}\cdot d\sigma^{(1)}. \tag{122,4}$$

Наконец, сложив (122,3) и (122,4), получим

$$-d\sigma^{(1)}\cdot\alpha F\left(\frac{|\mathbf{q}|}{2m}\right)\ln\frac{m}{2\omega_{\max}}. \tag{122,5}$$

Мы видим, что расходящийся вклад от мягких ($|\mathbf{k}| \sim \lambda$) виртуальных фотонов действительно сокращается с вкладом излучения таких же реальных фотонов. Та же ситуация имеет место в любом другом процессе рассеяния.

В то же время появляется зависимость сечения рассеяния от $\omega_{\max}$. Эта зависимость — следствие того, что величина $\omega_{\max}$ входит в самое определение рассеяния как процесса, в котором может быть испущено любое число мягких фотонов. Естественно, что сечение такого процесса будет тем меньше, чем ниже предел $\omega_{\max}$ частот фотонов, испускание которых мы еще относим к данному процессу рассеяния.

[1]) В этом легко убедиться, использовав связь

$$\frac{|\mathbf{q}|}{m} = \frac{1-\xi}{\sqrt{\xi}}$$

между $|\mathbf{q}|$ и переменной ξ, через которую выражено (117,17).

Найдем теперь полное выражение для радиационной поправки к сечению рассеяния. Поступая по стандартным правилам (см. (65,7)), находим для сечения, усредненного по поляризациям начального и просуммированного по поляризациям конечного электронов:

$$d\sigma = d\sigma^{(1)} + d\sigma_{\text{рад}} =$$
$$= |e\Phi(\mathbf{q})|^2 \operatorname{Sp}\{(\gamma p' + m)(\gamma^0 + \gamma^0 Q_{\text{рад}})(\gamma p + m)(\gamma^0 + \bar{Q}_{\text{рад}}\gamma^0)\} \frac{do'}{32\pi^2}. \tag{122,6}$$

Согласно (122,1)

$$Q_{\text{рад}} = a + b\gamma\mathbf{q}, \qquad \bar{Q}_{\text{рад}} = \gamma^0 Q^+_{\text{рад}}\gamma^0 = a + b\gamma\mathbf{q},$$
$$a = f(-\mathbf{q}^2) - 1 - \frac{1}{\mathbf{q}^2}\mathscr{P}(-\mathbf{q}^2), \qquad b = \frac{1}{2m} g(-\mathbf{q}^2).$$

С точностью до членов, линейных по a и b, след в (122,6) равен

$$\frac{1}{4}\operatorname{Sp}\{\ldots\} = 2\left(\varepsilon^2 - \frac{\mathbf{q}^2}{4}\right)(1 + 2a) - 2bm\mathbf{q}^2.$$

Поэтому

$$d\sigma_{\text{рад}} = 2\left\{f_\lambda(-\mathbf{q}^2) - 1 - \frac{1}{\mathbf{q}^2}\mathscr{P}(-\mathbf{q}^2) - \frac{\mathbf{q}^2}{4\varepsilon^2 - \mathbf{q}^2} g(-\mathbf{q}^2)\right\} d\sigma^{(1)}, \tag{122,7}$$

где $d\sigma^{(1)}$ — борновское сечение рассеяния неполяризованных электронов (80,5); формфактору f приписан индекс λ для напоминания о том, что он «обрезан по массе фотона λ».

Остается прибавить к (122,7) сечение испускания мягких фотонов. Если представить f_λ в виде

$$f_\lambda(-\mathbf{q}^2) = 1 - \frac{\alpha}{2} F\left(\frac{|\mathbf{q}|}{2m}\right)\ln\frac{m}{\lambda} + \alpha F_2, \tag{122,8}$$

то согласно (120,11) это добавление сведется к замене в (122,7) f_λ на

$$f_{\omega_{\max}} = 1 - \frac{\alpha}{2} F\left(\frac{|\mathbf{q}|}{2m}\right)\ln\frac{m}{2\omega_{\max}} + \frac{\alpha}{2}F_1 + \alpha F_2. \tag{122,9}$$

С этой заменой (122,7) дает окончательный ответ.

Отметим, что в нерелятивистском пределе [1])

$$f_{\omega_{\max}} = 1 - \frac{\alpha\mathbf{q}^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{2\omega_{\max}} + \frac{11}{24}\right), \qquad \mathbf{q}^2 \ll m^2. \tag{122,10}$$

Обратим внимание на то, что специфика внешнего поля входит в радиационную поправку к сечению только через посред-

[1]) Это выражение отличается от нерелятивистского (117,20) заменой $\ln\lambda \to \ln 2\omega_{\max} - {}^5/_6$.

ство $d\sigma^{(1)}$; множитель же в фигурных скобках в (122,7) имеет универсальный характер. В нерелятивистском приближении

$$d\sigma_{\text{рад}} = -d\sigma^{(1)} \cdot \frac{2\alpha}{3\pi} \frac{\mathbf{q}^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{2\omega_{\max}} + \frac{19}{30} \right), \qquad \mathbf{q}^2 \ll m^2 \qquad (122{,}11)$$

(сюда входят вклады от всех членов в (122,7)). В обратном же, ультрарелятивистском, случае основной вклад вносит только член с $f_{\omega_{\max}} - 1$ и получается

$$d\sigma_{\text{рад}} = -d\sigma^{(1)} \cdot \frac{2\alpha}{\pi} \ln \frac{\mathbf{q}^2}{m^2} \ln \frac{\varepsilon}{\omega_{\max}}, \qquad \mathbf{q}^2 \gg m^2. \qquad (122{,}12)$$

Отметим в заключение, что рассмотренные здесь радиационные поправки не приводят к появлению каких-либо поляризационных эффектов, отсутствующих в первом борновском приближении (в отличие от поправок второго борновского приближения, рассмотренных в § 121). Дело в том, что специфика первого борновского приближения в конечном счете связана с эрмитовостью S-матрицы. Это свойство, однако, сохраняется и при учете рассмотренных радиационных поправок, поскольку в этом приближении отсутствуют какие-либо реальные промежуточные состояния в канале рассеяния (так что правая часть соотношения унитарности обращается в нуль)[1]).

§ 123. Радиационное смещение атомных уровней

Радиационные поправки приводят к смещению уровней энергии связанных состояний электрона во внешнем поле (так называемое *смещение Лэмба*). Наиболее интересный случай этого рода — смещение уровней атома водорода (или водородоподобного иона)[2]).

[1]) Вычисление радиационных поправок к процессам, появляющимся лишь во втором приближении теории возмущений, значительно более громоздко и в этой книге не будет воспроизведено. Ограничимся лишь некоторыми литературными ссылками: радиационные поправки к рассеянию фотона на электроне. — *Brown L. M., Feynman R.*//Phys. Rev. — 1952. — Vol. 85. — P. 231; к двухфотонной аннигиляции пары—*Harris I., Brown L. M.*//Phys. Rev.—1957.— Vol. 105. — P. 1656; к рассеянию электрона электроном и позитроном — *Redhead M.*//Proc. Roy. Soc. — 1953. — Vol. A220.— P. 219; *Половин Р. В.*// ЖЭТФ. — 1956. — Т. 31. — С. 449; к тормозному излучению — *Фомин П. И.*// ЖЭТФ.— 1958.— Т. 35.— С. 707.

[2]) Сдвиг водородных уровней впервые вычислил *Бете* (*H. A. Bethe*, 1947) с логарифмической точностью на основе нерелятивистского рассмотрения; этот расчет послужил толчком для всего последующего развития квантовой электродинамики. Разность уровней $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ (в первом неисчезающем приближении теории возмущений) была точно вычислена *Кроллем* и *Лэмбом* (*N. M. Kroll, W. E. Lamb*, 1949), а полная формула для сдвига уровней была найдена *Вайскопфом* и *Френчем* (*V. Weisskopf, J. B. French*, 1949).