

ство $d\sigma^{(1)}$; множитель же в фигурных скобках в (122,7) имеет универсальный характер. В нерелятивистском приближении

$$d\sigma_{\text{рад}} = -d\sigma^{(1)} \cdot \frac{2\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{2\omega_{\text{max}}} + \frac{19}{30} \right), \quad q^2 \ll m^2 \quad (122,11)$$

(сюда входят вклады от всех членов в (122,7)). В обратном же, ультрарелятивистском, случае основной вклад вносит только член с $f_{\omega_{\text{max}}} - 1$ и получается

$$d\sigma_{\text{рад}} = -d\sigma^{(1)} \cdot \frac{2\alpha}{\pi} \ln \frac{q^2}{m^2} \ln \frac{\varepsilon}{\omega_{\text{max}}}, \quad q^2 \gg m^2. \quad (122,12)$$

Отметим в заключение, что рассмотренные здесь радиационные поправки не приводят к появлению каких-либо поляризационных эффектов, отсутствующих в первом борновском приближении (в отличие от поправок второго борновского приближения, рассмотренных в § 121). Дело в том, что специфика первого борновского приближения в конечном счете связана с эрмитовостью S -матрицы. Это свойство, однако, сохраняется и при учете рассмотренных радиационных поправок, поскольку в этом приближении отсутствуют какие-либо реальные промежуточные состояния в канале рассеяния (так что правая часть соотношения унитарности обращается в нуль)¹⁾.

§ 123. Радиационное смещение атомных уровней

Радиационные поправки приводят к смещению уровней энергии связанных состояний электрона во внешнем поле (так называемое *смещение Лэмба*). Наиболее интересный случай этого рода — смещение уровней атома водорода (или водородоподобного иона)²⁾.

¹⁾ Вычисление радиационных поправок к процессам, появляющимся лишь во втором приближении теории возмущений, значительно более громоздко и в этой книге не будет воспроизведено. Ограничимся лишь некоторыми литературными ссылками: радиационные поправки к рассеянию фотона на электроне. — *Brown L. M., Feynman R.*//Phys. Rev. — 1952. — Vol. 85. — P. 231; к двухфотонной аннигиляции пары — *Harris J., Brown L. M.*//Phys. Rev. — 1957. — Vol. 105. — P. 1656; к рассеянию электрона электроном и позитроном — *Redhead M.*//Proc. Roy. Soc. — 1953. — Vol. A220. — P. 219; *Половин Р. В.*//ЖЭТФ. — 1956. — Т. 31. — С. 449; к тормозному излучению — *Фомин П. И.*//ЖЭТФ. — 1958. — Т. 35. — С. 707.

²⁾ Сдвиг водородных уровней впервые вычислил *Бете (H. A. Bethe, 1947)* с логарифмической точностью на основе нерелятивистского рассмотрения; этот расчет послужил толчком для всего последующего развития квантовой электродинамики. Разность уровней $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ (в первом неисчисляющем приближении теории возмущений) была точно вычислена *Кроллем и Лэмбом (N. M. Kroll, W. E. Lamb, 1949)*, а полная формула для сдвига уровней была найдена *Вайскопфом и Френчем (V. Weisskopf, J. B. French, 1949)*.

Последовательный метод вычисления поправок к уровням энергии основан на использовании точного электронного пропагатора во внешнем поле (см. § 109). Но если

$$Z\alpha \ll 1, \quad (123,1)$$

то можно воспользоваться более простым способом, в котором внешнее поле рассматривается как возмущение.

В первом приближении по внешнему полю радиационная поправка во взаимодействии электрона с постоянным электрическим полем описывается теми двумя диаграммами (121,2), которые уже рассматривались нами в связи с задачей о рассеянии электрона в таком поле; переход от одной задачи к другой требует лишь простой переформулировки (см. ниже).

Легко понять, однако, что таким способом можно найти только ту часть сдвига уровня, которая обусловлена взаимодействием с виртуальными фотонами достаточно больших частот. Действительно, рассмотрим, например, следующую (по внешнему полю) радиационную поправку к амплитуде рассеяния электрона:



(123,2)

(в отличие от (121,2, б) эта диаграмма содержит две вершины внешнего поля). В той области интегрирования по d^4k , где k_0 достаточно велико, эта поправка содержит лишнюю степень $Z\alpha$ и поэтому несущественна. Но введение в диаграмму второй вершины внешнего поля вводит в нее также и еще один электронный пропагатор $G(f)$. При малых k (и нерелятивистских внешних концах p и p') оказываются существенными импульсы виртуальных электронов f , близкие к полюсу пропагатора $G(f)$. Появляющийся в результате малый знаменатель компенсирует лишний малый множитель $Z\alpha$. То же самое относится, очевидно, и к поправкам всех вообще порядков по внешнему полю. Другими словами, в области малых частот виртуальных фотонов внешнее поле должно учитываться точным образом.

Разобьем искомый сдвиг уровня δE_s ¹⁾ на две части:

$$\delta E_s = \delta E_s^{(1)} + \delta E_s^{(11)}, \quad (123,3)$$

¹⁾ В этом параграфе E_s обозначает энергию электрона в атоме, не включающую в себя его энергию покоя. Индекс s — совокупность квантовых чисел, определяющих состояние атома.

происходящие соответственно от взаимодействия с виртуальными фотонами частоты в областях I) $k_0 > \kappa$, II) $k_0 < \kappa$. При этом выберем κ так, чтобы было

$$(Z\alpha)^2 m \ll \kappa \ll m \quad (123,4)$$

($Z^2\alpha^2 m$ — порядок величины энергии связи электрона в атоме). Тогда в области I достаточно учитывать поле ядра лишь в первом приближении. В области же II надо учитывать поле ядра точным образом, но зато (в силу условия $\kappa \ll m$) можно решать задачу в нерелятивистском приближении — не только по отношению к самому электрону, но и для всех промежуточных состояний. При условии (123,4) области применимости обоих способов расчета перекрываются, что и позволяет произвести строгую «сшивку» обеих частей поправки к уровню.

Высокочастотная часть сдвига

Рассмотрим сначала область I. В ней можно воспользоваться поправкой к амплитуде рассеяния (122,1), из которой, однако, необходимо предварительно исключить вклад виртуальных фотонов, относящихся к области II. Такие фотоны вносят лишь малый вклад в формфактор g , который поэтому не нуждается в изменении. В функцию же f виртуальные фотоны малых частот вносят большой вклад из-за инфракрасной расходимости. Поэтому в качестве f в (122,1) надо подставить функцию f_κ , из которой область $k_0 < \kappa$ уже исключена.

Такое исключение можно было бы произвести прямым способом, вычитая из f интеграл по области $k_0 < \kappa$. Требуемый результат можно, однако, получить без новых вычислений, используя результаты § 122.

Для этого заметим, что исключение частот $k_0 < \kappa$ можно рассматривать как один из возможных способов инфракрасного обрезания. Результат же для поправки к сечению рассеяния не может, разумеется, зависеть от способа обрезания при условии, что таким же образом обрезается и вероятность испускания реальных мягких фотонов, т. е. в понятие «упругого» рассеяния включается испускание с частотами лишь от κ до заданного ω_{\max} . Если выбрать $\omega_{\max} = \kappa$, то явный учет испускания фотонов станет излишним. Отсюда ясно, что f_κ получается из определенной в § 122 функции $f_{\omega_{\max}}$ просто заменой ω_{\max} на κ . В частности, в нерелятивистском случае

$$f_\kappa - 1 = - \frac{\alpha q^2}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{2\kappa} + \frac{11}{24} \right). \quad (123,5)$$

Преобразуем теперь поправку (122,1) к амплитуде рассеяния, представив ее как результат соответствующей поправки к

эффективной потенциальной энергии электрона в поле. Сравнивая амплитуду (122,1)

$$- e(u'^* Q_{\text{рад}} \Phi u)$$

с борновской амплитудой рассеяния (121,6)

$$- e(u'^* \Phi u),$$

мы видим, что роль такой поправки играет (в импульсном представлении) функция

$$e \delta \Phi(\mathbf{q}) = e Q_{\text{рад}}(\mathbf{q}) \Phi(\mathbf{q}). \quad (123,6)$$

В нерелятивистском случае, взяв \mathcal{P} и g из (113,14) и (117,20), а для f подставив f_x из (123,5), получим

$$\delta \Phi(\mathbf{q}) = \left\{ -\frac{\alpha q^2}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{2k} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} \right) + \frac{\alpha}{4\pi m} \mathbf{q} \mathbf{v} \right\} \Phi(\mathbf{q}). \quad (123,7)$$

Соответствующая функция $\delta \Phi(\mathbf{r})$ в координатном представлении¹⁾:

$$\delta \Phi(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{2k} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} \right) \Delta \Phi(\mathbf{r}) - i \frac{\alpha}{4\pi m} \mathbf{v} \nabla \Phi(\mathbf{r}). \quad (123,8)$$

Смещение уровня $\delta E_s^{(1)}$ получим, усредняя $e \delta \Phi(\mathbf{r})$ по волновой функции невозмущенного состояния электрона в атоме, т. е. как соответствующий диагональный матричный элемент²⁾:

$$\delta E_s^{(1)} = \frac{e\alpha}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{2k} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} \right) \langle s | \Delta \Phi | s \rangle - i \frac{e\alpha}{4\pi m} \langle s | \mathbf{v} \nabla \Phi | s \rangle. \quad (123,9)$$

В первом члене достаточно использовать при усреднении нерелятивистскую функцию электрона. Во втором же члене такого приближения недостаточно: нулевое приближение по нерелятивистским функциям обращается в нуль ввиду отсутствия у матриц \mathbf{v} диагональных элементов. Поэтому здесь надо воспользоваться найденной в § 33 приближенной релятивистской функ-

¹⁾ Подчеркнем отличие этой поправки к потенциалу от поправки, рассматривавшейся в § 114. Последняя включала в себя только эффект поляризации вакуума (диаграмма (121,2,а)) для кулонова поля как такового. Поправка же (123,8) относится уже ко взаимодействию поля с электроном и включает в себя также и эффект изменения движения электрона (диаграмма (121,2,б)).

²⁾ Строго говоря, определенные в § 117 факторы относились к вершинному оператору при двух свободных электронных концах ($p^2 = = p'^2 = m^2$). Для электрона же в атоме энергия E_s — уровень, вообще никак не связанный с p . Этим отличием можно, однако, пренебречь в области I.

цией $\psi = \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix}$, сохранив в ней малые (в стандартном представлении) компоненты χ . Имеем

$$\psi^* \gamma \psi = \Phi^* \sigma \chi - \chi^* \sigma \Phi$$

и, подставив из (33,4)

$$\chi = \frac{1}{2m} \sigma \hat{p} \Phi = -\frac{i}{2m} \sigma \nabla \Phi,$$

получим

$$\begin{aligned} \langle s | \gamma \nabla \Phi | s \rangle &= -\frac{i}{2m} \int \{ \Phi^* (\sigma \nabla \Phi) (\sigma \nabla \Phi) + (\nabla \Phi^* \cdot \sigma) (\sigma \nabla \Phi) \Phi \} d^3x = \\ &= \frac{i}{2m} \int \{ \Phi^* \Delta \Phi \cdot \Phi - 2i \sigma \Phi^* [\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi] \} d^3x \end{aligned}$$

(при преобразовании интеграла использовано тождество (33,5) и произведено интегрирование по частям). Поскольку $\Phi = \Phi(r)$, то

$$\nabla \Phi = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{d\Phi}{dr},$$

и поэтому

$$-i \sigma [\nabla \Phi \cdot \nabla] = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \sigma \hat{\mathbf{l}},$$

где $\hat{\mathbf{l}} = -i[\mathbf{r} \nabla]$ — оператор орбитального момента. Наконец, собрав полученные выражения и подставив в (123,9), найдем

$$\delta E_s^{(1)} = \frac{e^3}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{2\kappa} + \frac{19}{30} \right) \langle s | \Delta \Phi | s \rangle + \frac{e^3}{4\pi m^2} \langle s | \sigma \mathbf{l} \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} | s \rangle, \quad (123,10)$$

где теперь уже в обоих членах усреднение производится по нерелятивистской волновой функции.

Низкочастотная часть сдвига

Для вычисления второй части сдвига уровней используем прием, основанный в конечном итоге на условии унитарности.

В силу возможности испускания фотона возбужденное состояние атома является квазистационарным (а не строго стационарным). Такому состоянию можно приписать комплексное значение энергии, причем его мнимая часть равна $-\omega/2$, где ω — вероятность распада состояния, т. е. в данном случае полная вероятность испускания фотона (см. III, § 134). В нерелятивистском приближении излучение является дипольным, и

согласно (45,7) имеем

$$\operatorname{Im} \delta E_s = -\frac{1}{2} \omega_s = -\frac{2}{3} \sum_{s'} |\mathbf{d}_{ss'}|^2 (E_s - E_{s'})^3$$

(где суммирование производится по всем нижележащим уровням, $E_{s'} < E_s$), или в эквивалентном виде:

$$\operatorname{Im} \delta E_s = -\frac{2}{3} \int_0^\infty d\omega \cdot \sum_{s'} |\mathbf{d}_{ss'}|^2 (E_s - E_{s'})^3 \delta(E_s - E_{s'} - \omega). \quad (123,11)$$

Чтобы найти вещественную часть δE_s , следует рассмотреть E_s как комплексную переменную и произвести аналитическое продолжение. Это можно сделать, рассматривая δ -функции как происходящие от полюсов. Правило обхода полюсов задается, как обычно, добавлением отрицательной части к массам виртуальных частиц, в данном случае — к массам $m_{s'}$ электрона в промежуточных состояниях атома. Роль этих масс играют $m_{s'} = m + E_{s'}$, так что надо положить

$$E_{s'} \rightarrow E_{s'} - i0,$$

откуда следует замена

$$\delta(E_s - E_{s'} - \omega) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{E_s - E_{s'} - \omega + i0} \quad (123,12)$$

(ср. (111,3)).

Подставив (123,12) в (123,11), найдем, таким образом,

$$\operatorname{Im} \delta E_s = \operatorname{Im} \frac{2}{3\pi} \int_0^\infty d\omega \cdot \sum_{s'} |\mathbf{d}_{ss'}|^2 \frac{(E_s - E_{s'})^3}{E_s - E_{s'} - \omega + i0}.$$

Искомое аналитическое продолжение получится теперь просто опусканием знака Im в обеих сторонах равенства. Нам надо, однако, выделить из δE_s лишь ту часть, которая связана с вкладом частот в области II: $\omega < \kappa$. Для этого достаточно заменить верхний предел интеграла на κ . Произведя интегрирование, получим в результате

$$\delta E_s^{(II)} = \frac{2}{3\pi} \sum_{s'} |\mathbf{d}_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s)^3 \ln \frac{\kappa}{E_{s'} - E_s + i0} \quad (123,13)$$

(в силу неравенства (123,4) на верхнем пределе мы пренебрегли разностью $E_s - E_{s'}$ по сравнению с κ). В дальнейшем нас будет интересовать только вещественная часть уровня; она получается заменой в (123,13) аргумента логарифма на $\kappa/|E_{s'} - E_s|$.

В выражении (123,13) преобразуем член с $\ln \kappa$, заменив матричные элементы дипольного момента $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ матричными элементами импульса $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ и его производной $\dot{\mathbf{p}}$:

$$\begin{aligned} \sum_{s'} |\mathbf{d}_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s)^3 &= -\frac{e^2}{m^2} \sum_{s'} |\mathbf{p}_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s) = \\ &= \frac{ie^2}{2m^2} \sum_{s'} \{(\dot{\mathbf{p}})_{ss'} \mathbf{p}_{s's} - \mathbf{p}_{ss'} (\dot{\mathbf{p}})_{s's}\}. \end{aligned}$$

Заменив теперь $\hat{\mathbf{p}}$ согласно операторному уравнению движения электрона $\hat{\mathbf{p}} = -e\nabla\Phi$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{s'} |\mathbf{d}_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s)^3 &= -\frac{ie^3}{2m^2} \sum_{s'} \{(\nabla\Phi)_{ss'} \mathbf{p}_{s's} - \mathbf{p}_{ss'} (\nabla\Phi)_{s's}\} = \\ &= \frac{ie^3}{2m^2} \langle s | \mathbf{p} \nabla\Phi - \nabla\Phi \mathbf{p} | s \rangle = \frac{e^3}{2m^2} \langle s | \Delta\Phi | s \rangle. \quad (123,14) \end{aligned}$$

Поэтому можно переписать (123,13) в виде

$$\delta E_s^{(11)} = \frac{e^3}{3\pi m^2} \langle s | \Delta\Phi | s \rangle \ln \frac{2\kappa}{m} + \frac{2e^2}{3\pi} \sum_{s'} |\mathbf{r}_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s)^3 \ln \frac{m}{2|E_s - E_{s'}|}. \quad (123,15)$$

Полный сдвиг

Наконец, сложив обе части, найдем следующую окончательную формулу для сдвига уровня:

$$\begin{aligned} \delta E_s &= \frac{2e^2}{3\pi} \sum_{s'} |\mathbf{r}_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s)^3 \ln \frac{m}{2|E_s - E_{s'}|} + \\ &+ \frac{e^3}{3\pi m^2} \frac{19}{30} \langle s | \Delta\Phi | s \rangle + \frac{e^3}{4\pi m^2} \langle s | \boldsymbol{\sigma} \mathbf{l} \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} | s \rangle \quad (123,16) \end{aligned}$$

([как и должно быть, вспомогательная величина κ из нее выпала]¹⁾).

Все матричные элементы в (123,16) берутся по отношению к нерелятивистским волновым функциям электрона в атоме. Для атома водорода (или водородоподобного иона) эти функции зависят только от трех квантовых чисел: главного квантового числа n , орбитального момента l и его проекции m (но не от пол-

¹⁾ Определение поправок следующего порядка в сдвиге уровней требует очень сложных вычислений. Наиболее полную сводку и систематический вывод таких поправок (вместе с соответствующей библиографией) можно найти в статьях: *Erickson G. W., Yennie D. R.* // *Ann. of Physics.* — 1965. — Vol. 35. — P. 271, 447.

ного момента j); соответствующие же уровни энергии зависят только от n . Введем обозначение¹⁾

$$L_{nl} = \frac{n^3}{2m(Ze^2)^4} \sum_{n'l'm'} |\langle n'l'm' | \mathbf{r} | nlm \rangle|^2 (E_{n'} - E_n)^3 \ln \frac{m(Ze^2)^2}{2|E_{n'} - E_n|}. \quad (123,17)$$

Уровни энергии пропорциональны $(Ze^2)^2$, а характерный размер атома пропорционален Ze^2 ; поэтому определенные согласно (123,17) величины L_{nl} от Z не зависят. Эти величины могут быть найдены численно.

Далее рассмотрим отдельно случаи $l=0$ и $l \neq 0$. При $l=0$ последний член в (123,16) исчезает. Во втором члене воспользуемся уравнением

$$e \Delta \Phi = 4\pi Ze^2 \delta(\mathbf{r}),$$

которому удовлетворяет потенциал кулонова поля ядра. Отсюда

$$\langle nlm | \Delta \Phi | nlm \rangle = 4\pi Ze^2 |\psi_{nlm}(0)|^2 = \begin{cases} 4m^3 (Ze^2)^4 n^{-3}, & l=0, \\ 0, & l \neq 0 \end{cases}$$

(см. (34,3)). В первом же члене вводим обозначение (123,17) и еще раз используем равенство (123,14):

$$\sum_{n'l'm'} |\langle n'l'm' | \mathbf{r} | n00 \rangle|^2 (E_{n'} - E_n)^3 = \frac{e}{2m^2} \langle n00 | \Delta \Phi | n00 \rangle = \frac{2m(Ze^2)^4}{n^3}.$$

В результате получим следующее выражение для сдвига s -термов:

$$\delta E_{n0} = \frac{4mc^2 Z^4 \alpha^5}{3\pi n^3} \left[\ln \frac{1}{(Z\alpha)^2} + L_{n0} + \frac{19}{30} \right] \quad (123,18)$$

(обычные единицы). Числовые значения нескольких величин L_{n0} :

$n =$	1	2	3	4	∞
$L_{n0} =$	-2,984	-2,812	-2,768	-2,750	-2,721

Невозмущенные уровни $E_n = -mc^2(Z\alpha)^2/2n^2$; поэтому относительная величина радиационного сдвига

$$\left| \frac{\delta E_{n0}}{E_{n0}} \right| \sim Z^2 \alpha^3 \ln \frac{1}{Z\alpha}. \quad (123,19)$$

¹⁾ Матричные элементы от \mathbf{r} диагональны по числу j и от j не зависят; поэтому суммирование по s в (123,16) сводится к суммированию по n, l, m . В силу изотропии пространства сумма (123,17) не зависит, конечно, и от квантового числа m .

В случае $l \neq 0$ в (123,16) исчезает второй член. Третий же вычисляется с помощью формул, приведенных в § 34. В этом члене имеется зависимость также и от числа j . В результате получим

$$\delta E_{nlj} = \frac{4mc^2 Z^4 \alpha^5}{3\pi n^3} \left[L_{nl} + \frac{3}{8} \frac{j(j+1) - l(l+1) - 3/4}{l(l+1)(2l+1)} \right], \quad l \neq 0. \quad (123,20)$$

Таким образом, радиационный сдвиг снимает последнее вырождение, оставшееся после учета спин-орбитального взаимодействия, — вырождение уровней с одинаковыми значениями n и j , но разными $l = j \pm 1/2$. Так, числовое значение $L_{21} = +0,030$ и из (123,18—20) получается следующая величина для разности уровней $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ атома водорода:

$$E_{20^{1/2}} - E_{21^{1/2}} = 0,41 mc^2 \alpha^5$$

(этой разности отвечает частота 1050 МГц).

§ 124. Радиационное смещение уровней мезоатомов

В конце § 118 была выяснена существенная роль, которую играет эффект поляризации электронного вакуума в радиационной поправке (второго приближения) к магнитному моменту мюона. Еще важнее этот эффект для радиационного сдвига (уже в первом приближении) уровней μ -мезоводорода — водородоподобной системы из протона и μ -мезона (А. Д. Галанин, И. Я. Померанчук, 1952).

В произведенном в предыдущем параграфе расчете сдвига уровней обычного атома был учтен, в частности, эффект поляризации электронного вакуума (электронная петля в диаграмме (121,2,а)). Если, аналогичным образом, для мезоатома учитывать эффект поляризации мюонного вакуума, то весь расчет полностью переносится и на этот случай, с заменой лишь везде массы электрона $m = m_e$ массой мюона m_μ . Поскольку относительный сдвиг уровней оказался не зависящим от массы электрона (см. (123,19)), для мезоводорода получился бы тот же самый результат.

Легко видеть, однако, что значительно больший вклад в сдвиг уровней мезоатома внесет эффект поляризации электронного вакуума. Действительно, замена мюонной петли в диаграмме электронной означает замену мюонного поляризационного оператора электронным. Но поляризационный оператор $\mathcal{P}(q^2)$ обратно пропорционален квадрату массы частицы (при нерелятивистских значениях q^2). Ясно поэтому, что указанная замена приведет к увеличению эффекта в $(m_\mu/m_e)^2$ раз. Именно этим вкла-