

Так, для нескольких первых уровней мезоводорода численный расчет дает следующие значения относительного сдвига:

$$\frac{\delta E_{10}}{|E_{10}|} = -6,4 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{\delta E_{20}}{|E_{20}|} = -2,8 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{\delta E_{21}}{|E_{21}|} = -2,0 \cdot 10^{-5}.$$

### § 125. Релятивистское уравнение для связанных состояний

Метод, примененный в предыдущих параграфах к вычислению радиационного сдвига атомных уровней, неприменим для решения такой задачи, как определение поправок к уровням позитрония — системы из двух равноправных частиц, ни одна из которых не может рассматриваться по отношению к другой как источник внешнего поля.

Систематический метод решения этой задачи основан на том, что уровни энергии связанных состояний являются полюсами точной амплитуды взаимного рассеяния двух частиц (амплитуду нужно рассматривать как функцию суммарной энергии частиц в системе центра инерции). Действительно, позитроний в каждом из своих дискретных состояний можно рассматривать как «промежуточную частицу» определенной массы, через образование которой может идти процесс рассеяния электрона и позитрона; каждому же «одночастичному» промежуточному состоянию отвечает полюс амплитуды рассеяния (разумеется, эти полюсы лежат в нефизической области 4-импульсов рассеивающихся частиц).

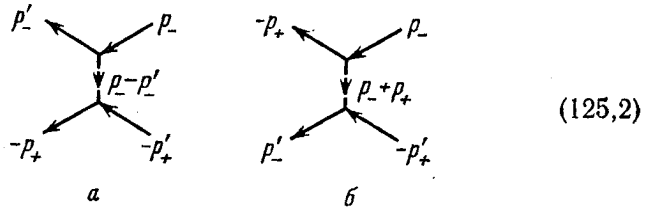
Согласно (106,17) точная амплитуда рассеяния строится из точной «четырёххвостой» вершинной части  $\Gamma_{ik, lm}$  и поляризационных амплитуд  $u$  частиц. Последние, очевидно, не имеют отношения к полюсным особенностям, и потому удобнее не рассматривать их вовсе, говоря вместо этого о полюсах самой вершинной части, т. е. функции

$$\Gamma_{ik, lm}(p'_-, -p_+; p_-, -p'_+), \quad (125,1)$$

где обозначения 4-импульсов внешних концов диаграммы (106,12) отвечают рассеянию позитрона на электроне.

Подчеркнем, что утверждение о наличии полюсов относится именно к точной амплитуде рассеяния или к точной вершинной части; в каждом же отдельном члене ряда теории возмущений полюс отсутствует. Последнее очевидно уже из того, что в фейнмановских диаграммах каждого приближения фигурируют лишь электронные (и фотонные) линии, но не линии «составной частицы» — позитрония как целого. Отсюда в свою очередь следует, что вычисление амплитуды рассеяния вблизи ее полюсов требует суммирования бесконечной последовательности диаграмм. Выясним, какие именно диаграммы входят в эту последовательность.

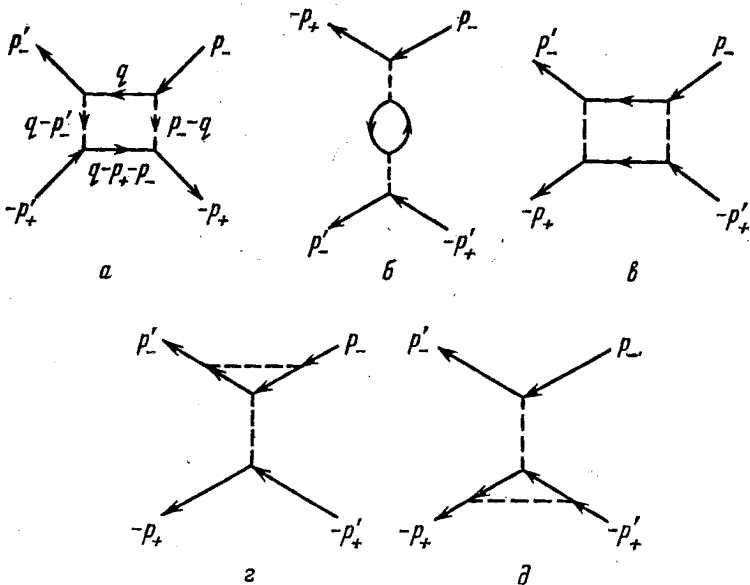
В первом исчезающем (первом по  $\alpha$ ) приближении теории возмущений вершинной части (125,1) отвечают две диаграммы второго порядка:



или в аналитическом виде:

$$\Gamma_{ik, lm} = -e^2 \gamma_{il}^\mu \gamma_{km}^\nu D_{\mu\nu} (p_- - p'_-) + e^2 \gamma_{im}^\mu \gamma_{kl}^\nu D_{\mu\nu} (p_- + p_+). \quad (125,3)$$

В следующем (втором по  $\alpha$ ) приближении имеется уже 10 диаграмм четвертого порядка:



(125,4)

и еще пять диаграмм, различающихся перестановкой  $p_- \leftrightarrow -p'_+$ . Все эти диаграммы имеют по сравнению с диаграммами (125,2) лишнюю степень  $e^2 = \alpha$ . Покажем, однако, что в диаграмме (125,4, a) эта лишняя степень малости компенсируется малым (при малых импульсах электрона и позитрона) знаменателем.

Будем рассматривать все величины в системе «центра инерции». Поскольку, однако, 4-импульсы внешних концов диаграмм не предполагаются физическими (т. е.  $p^2 \neq m^2$ ), то хотя в этой системе  $p_+ = -p_-$ , но  $\varepsilon_+ \neq \varepsilon_-$ . Таким образом, 4-импульсы концов

$$\begin{aligned} p_- &= (\varepsilon_-, \mathbf{p}), & p_+ &= (\varepsilon_+, -\mathbf{p}), \\ p'_- &= (\varepsilon'_-, \mathbf{p}'), & p'_+ &= (\varepsilon'_+, -\mathbf{p}'), \\ \varepsilon_- + \varepsilon_+ &= \varepsilon'_- + \varepsilon'_+. \end{aligned} \quad (125,5)$$

Энергия связи электрона и позитрона в позитронии  $\sim m\alpha^2$ . Поэтому в интересующей нас окрестности полюсов амплитуды рассеяния

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}| \sim |\mathbf{p}'| \sim m\alpha \ll m, \\ |\varepsilon_- - m| \sim |\varepsilon_+ - m| \sim \mathbf{p}^2/m \sim m\alpha^2, \dots \end{aligned} \quad (125,6)$$

Вклад в вершинную часть от диаграммы (125,4, а)

$$\begin{aligned} \Gamma_{ik,lm}^{(4a)} = -ie^4 \int (\gamma^\lambda G(q) \gamma^\mu)_{il} (\gamma^\nu G(q - p_- - p_+) \gamma^\rho)_{km} \times \\ \times D_{\lambda\rho}(q - p'_-) D_{\mu\nu}(p_- - q) \frac{d^4q}{(2\pi)^4}. \end{aligned} \quad (125,7)$$

В интеграле (125,7) существенна область значений  $q^\mu = (q_0, \mathbf{q})$ , близких к полюсам одновременно обеих функций  $G$ . В этой области  $|\mathbf{q}|$  и  $|q_0 - m|$  малы и электронные пропагаторы

$$\begin{aligned} G(q) = \frac{\gamma^0 q_0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{q} + m}{(q_0 + m)(q_0 - m) - \mathbf{q}^2 + i0} \approx \frac{\gamma^0 + 1}{2} \left[ q_0 - m - \frac{\mathbf{q}^2}{2m} + i0 \right]^{-1}, \\ G(q - p_- - p_+) \approx \frac{\gamma^0 - 1}{2} \left[ q_0 - \varepsilon_- - \varepsilon_+ + m + \frac{\mathbf{q}^2}{2m} - i0 \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (125,8)$$

Полюсы этих двух выражений лежат по разные стороны от вещественной оси в плоскости комплексной переменной  $q_0$ ; замкнув путь интегрирования вдоль этой оси, скажем, в верхней полуплоскости, вычислим интеграл по  $q_0$  по вычету относительно соответствующего полюса<sup>1)</sup>. В результате найдем

$$\Gamma^{(4a)} \sim e^4 \int \frac{d^3q}{(q - p'_-)^2 (p_- - q)^2 (2m - \varepsilon_- - \varepsilon_+ + \mathbf{q}^2/m)}$$

и отсюда, с учетом (125,6), оценку

$$\Gamma^{(4a)} \sim \alpha^2 \frac{(m\alpha)^3}{(m\alpha)^4 m\alpha^2} = \frac{1}{m^2\alpha}.$$

<sup>1)</sup> Для диаграммы же (125,4, в), отличающейся от (125,5, а) лишь взаимным направлением электронных линий, оба полюса оказались бы лежащими по одну сторону от вещественной оси, так что после сделанных пренебрежений интеграл вообще обратился бы в нуль.

Такой же порядок величины имеет и вклад в  $\Gamma$  от диаграммы второго порядка (125,2, *a*) (первый член в (125,3)), чем и доказывается сделанное выше утверждение о порядке малости диаграммы (125,4, *a*). Аналогичная ситуация имеет место и во всех дальнейших приближениях теории возмущений.

Таким образом, вычисление интересующей нас вершинной части вблизи ее полюсов требует суммирования бесконечной последовательности «аномально больших» диаграмм с промежуточными состояниями типа внутренних линий диаграммы (125,4, *a*). Для этих диаграмм характерно, что они могут быть рассечены между концами  $p_-$ ,  $-p_+$  и  $p'_-$ ,  $-p'_+$  на части, соединяющиеся друг с другом лишь двумя электронными линиями<sup>1)</sup>. Совокупность же всех диаграмм, не удовлетворяющих этому условию, назовем «компактной» вершинной частью и обозначим посредством  $\tilde{\Gamma}_{ik, lm}$ ; поскольку аномально большие диаграммы в нее не входят, эти величины можно вычислять по обычной теории возмущений. Так, в первом приближении  $\tilde{\Gamma}$  определяется обеими диаграммами второго порядка (125,2), а во втором — восемью диаграммами четвертого порядка (все диаграммы, за исключением (125,4, *a, б*)).

Классифицируя некомпактные вершинные части по числу содержащихся в них «двойных связей», можно представить полную  $\Gamma$  в виде бесконечного ряда:

$$\begin{array}{c} p'_- \\ \swarrow \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \nwarrow \\ p_- \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \swarrow \quad \nwarrow \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} \\ \swarrow \quad \nwarrow \quad \swarrow \quad \nwarrow \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} \\ \swarrow \quad \nwarrow \quad \swarrow \quad \nwarrow \quad \swarrow \quad \nwarrow \end{array} + \dots$$

(125,9)

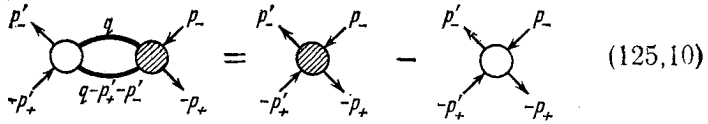
где все внутренние сплошные жирные линии — точные пропагаторы  $\mathcal{S}$  (ряд такого вида часто называют *лестничным*). Чтобы просуммировать этот ряд, «умножим» его слева еще на одну  $\tilde{\Gamma}$ <sup>2)</sup>:

$$\begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} \\ \swarrow \quad \nwarrow \quad \swarrow \quad \nwarrow \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} \\ \swarrow \quad \nwarrow \quad \swarrow \quad \nwarrow \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} \\ \swarrow \quad \nwarrow \quad \swarrow \quad \nwarrow \quad \swarrow \quad \nwarrow \end{array} + \dots$$

<sup>1)</sup> Такое определение включает в себя все аномально большие диаграммы, но наряду с ними также и некоторые «нормальные», например диаграмму (125,4, *б*).

<sup>2)</sup> Т. е. умножаем все члены ряда на  $\tilde{\Gamma}$  и две  $\mathcal{S}$  и производим соответствующее интегрирование по 4-импульсам новых внутренних связей.

Сравнив теперь этот ряд с исходным рядом (125,9), мы увидим, что



$$(125,10)$$

Это графическое равенство эквивалентно следующему интегральному уравнению:

$$i\Gamma_{ik, lm}(p'_-, -p_+; p_-, -p'_+) = i\tilde{\Gamma}_{ik, lm}(p'_-, -p_+; p_-, -p'_+) + \int \tilde{\Gamma}_{ir, sm}(p'_-, q - p'_+ - p'_-; q, -p'_+) \mathcal{G}_{st}(q) \mathcal{G}_{nr}(q - p'_+ - p'_-) \times \times \Gamma_{tk, ln}(q, -p_+; p_-, q - p'_+ - p'_-) \frac{d^4q}{(2\pi)^4}. \quad (125,11)$$

Функции  $\tilde{\Gamma}$  и  $\mathcal{G}$  вычисляются по теории возмущений, после чего уравнение (125,11) дает, в принципе, возможность вычислить  $\Gamma$  с любой требуемой точностью.

Для определения же уровней энергии достаточно знать лишь положение полюсов функции  $\Gamma$ . Вблизи полюсов  $\Gamma \gg \tilde{\Gamma}$ , так что первым членом правой стороны (125,11) (вторая диаграмма справа в (125,10)) можно пренебречь, и уравнение становится однородным относительно  $\Gamma$ . В этом уравнении переменные  $p_+$ ,  $p_-$ , а также и индексы  $k, l$  становятся параметрами, зависимость от которых остается произвольной (не определяется самим уравнением). Опустив эти параметры (а вместе с ними и штрихи у остающихся переменных  $p'_+$ ,  $p'_-$ ), получим уравнение

$$i\Gamma_{i, m}(p_-; -p_+) = \int \tilde{\Gamma}_{ir, sm}(p_-, q - p_+ - p_-; q, -p_+) \mathcal{G}_{st}(q) \times \times \mathcal{G}_{nr}(q - p_+ - p_-) \Gamma_{t, n}(q; q - p_+ - p_-) \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \quad (125,12)$$

(E. E. Salpeter, H. A. Bethé, 1951).

Записанное в системе центра инерции ( $p_+ + p_- = 0$ ), уравнение (125,12) имеет решения лишь при определенных значениях  $\varepsilon_+ + \varepsilon_-$ , которые и дают уровни энергии позитрония. Функция  $\Gamma_{i, m}$  играет при этом лишь вспомогательную роль. Вместо нее удобнее ввести другую функцию:

$$\chi_{sr}(p_1, p_2) = \mathcal{G}_{st}(p_1) \Gamma_{t, n}(p_1; p_2) \mathcal{G}_{nr}(p_2). \quad (125,13)$$

Тогда уравнение (125,12) примет вид

$$i[\mathcal{G}^{-1}(p_-) \chi(p_-, -p_+) \mathcal{G}^{-1}(-p_+)]_{im} = \int \tilde{\Gamma}_{ir, sm}(p_-, q - p_+ - p_-; q, -p_+) \chi_{sr}(q, q - p_+ - p_-) \frac{d^4q}{(2\pi)^4}, \quad (125,14)$$

в котором  $\tilde{\Gamma}$  выступает как ядро интегрального оператора. Как уже упоминалось,  $\tilde{\Gamma}$  может вычисляться по теории возмущений; то же самое относится, конечно, и к функции  $\mathcal{G}^{-1}$ .

Покажем, что в первом (по  $\alpha$ ) приближении теории возмущений (125,14) сводится, как и следовало ожидать, к нерелятивистскому уравнению Шредингера для позитрония.

В первом нерелятивистском приближении  $\tilde{\Gamma}$  определяется одной лишь диаграммой (125,2, а) (диаграмма аннигиляционного типа (125,2, б) обращается в этом приближении в нуль<sup>1)</sup>). Как и по аналогичному поводу в § 83, фотонный пропагатор удобно выбрать в кулоновой калибровке (76,12—13), причем достаточно оставить в нем лишь компоненту  $D_{00}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ir, sm}(p_-, q - p_+ - p_-; q, -p_+) &= -e^2 \gamma_{is}^0 \gamma_{rm}^0 D_{00}(q - p_-) = \\ &= -U(\mathbf{q} - \mathbf{p}_-) \gamma_{is}^0 \gamma_{rm}^0, \end{aligned}$$

где

$$U(\mathbf{q}) = -4\pi e^2 / \mathbf{q}^2$$

— компонента Фурье потенциальной энергии кулонова взаимодействия позитрона и электрона. Уравнение (125,14) принимает вид

$$\begin{aligned} i\chi_{im}(p_-, -p_+) &= \\ &= \left[ G(p_-) \gamma^0 \int U(\mathbf{q} - \mathbf{p}_-) \chi(q, q - p_+ - p_-) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \cdot \gamma^0 G(-p_+) \right]_{im}, \end{aligned} \quad (125,15)$$

где также заменены точные пропагаторы  $\mathcal{G}$  пропагаторами свободных электронов  $G$ . Для последних имеем приближенные выражения (ср. (125,8))

$$G(p_-) \approx \frac{1 + \gamma^0}{2} g(p_-), \quad G(-p_+) \approx \frac{1 - \gamma^0}{2} g(p_+),$$

где выделены матричные множители, а  $g(p)$  — скалярная функция:

$$g(p) = [\varepsilon - m - \mathbf{p}^2/2m + i0]^{-1}. \quad (125,16)$$

При подстановке этих выражений в (125,15) замечаем, что все отличные от нуля матричные элементы

$$\left[ \frac{1 + \gamma^0}{2} \gamma^0 \chi \gamma^0 \frac{1 - \gamma^0}{2} \right]_{im} = \left[ \frac{\gamma^0 + 1}{2} \chi \frac{\gamma^0 - 1}{2} \right]_{im}$$

<sup>1)</sup> Напомним, что скорости частиц в позитронии  $v/c \sim \alpha$ . В этом смысле разложения по  $\alpha$  и по  $1/c$  взаимно связаны.

совпадают с элементами  $-\chi_{im}$ . Поэтому матричное уравнение (125,15) эквивалентно уравнению для скалярной функции

$$i\chi(p_-, -p_+) = \\ = -g(p_-)g(p_+) \int U(\mathbf{q} - \mathbf{p}_-) \chi(q, q - p_+ - p_-) \frac{d^4q}{(2\pi)^4}. \quad (125,17)$$

Введем теперь вместо  $p_+, p_-$  переменные

$$p \equiv (\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{p_- - p_+}{2}, \quad P = p_- + p_+$$

(4-импульсы относительного движения частиц и позитрония как целого). В системе центра инерции

$$P = (E + 2m, 0),$$

где полная энергия обозначена  $E + 2m$ , т. е.  $E$  — уровень энергии, отсчитываемый от массы покоя. Выразив через эти переменные, перепишем (125,17) в виде

$$i\chi(p, P) = \\ = -g\left(p + \frac{P}{2}\right)g\left(-p + \frac{P}{2}\right) \int U(\mathbf{q} - \mathbf{p}_-) \chi\left(q - \frac{P}{2}, P\right) \frac{d^4q}{(2\pi)^4} = \\ = -g\left(p + \frac{P}{2}\right)g\left(-p + \frac{P}{2}\right) \int U(\mathbf{q}' - \mathbf{p}) \chi(q', P) \frac{d^4q'}{(2\pi)^4};$$

$P$  входит в это уравнение уже только как параметр, а функция  $\chi$  входит в правую сторону равенства только в виде интеграла

$$\psi(\mathbf{q}) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(q, P) dq_0.$$

Проинтегрировав обе стороны равенства по  $d\varepsilon$ , получим из него замкнутое уравнение для  $\psi$ :

$$\psi(\mathbf{p}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g\left(p + \frac{P}{2}\right)g\left(-p + \frac{P}{2}\right) d\varepsilon \int U(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \psi(\mathbf{q}) \frac{d^3q}{(2\pi)^3},$$

где

$$g\left(\pm p + \frac{P}{2}\right) = \left[\pm \varepsilon + \frac{E}{2} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + i0\right]^{-1}.$$

Замкнув путь интегрирования по  $d\varepsilon$ , скажем, в верхней полуплоскости комплексного  $\varepsilon$ , вычислим интеграл по вычету в соответствующем полюсе и окончательно получим

$$\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m} - E\right) \psi(\mathbf{p}) + \int U(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \psi(\mathbf{q}) \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = 0. \quad (125,18)$$

Это и есть уравнение Шредингера для позитрония в импульсном представлении (см. III (130,4)).

Если бы мы ограничились для  $\tilde{\Gamma}$  диаграммами (125,2), но учли бы в них (а также и в  $\mathcal{G}$ ) следующие члены разложения по  $1/c$ , мы получили бы уравнение Брейта (см. § 83). Учет же диаграмм из (125,4) (вместе с дальнейшими членами разложения по  $1/c$ ) дает радиационные поправки к уровням позитрония; однако вычисления становятся очень сложными.

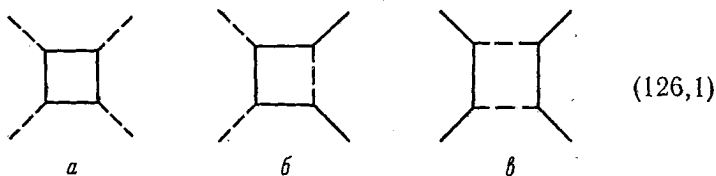
Приведем вычисленную с этими поправками разность основных уровней орто- и парапозитрония<sup>1)</sup>:

$$E(^3S_1) - E(^1S_0) = \alpha^2 \frac{me^4}{2\hbar^2} \left\{ \frac{7}{6} - \left( \frac{16}{9} + \ln 2 \right) \frac{\alpha}{\pi} - i \frac{\alpha}{2} \right\}. \quad (125,19)$$

Первый член в фигурных скобках — тонкое расщепление (см. задачу 2, § 84). Второй член — радиационная поправка к разности уровней. Мнимая же часть разности связана с вероятностью аннигиляции парапозитрония (см. (89,4)), т. е. с комплексностью уровня  $^1S_0$ ; для парапозитрония ширина уровня оказывается того же порядка величины, что и радиационная поправка к его вещественной части.

## § 126. Двойное дисперсионное соотношение

Следующим по сложности за вершинной частью с тремя внешними линиями является блок с четырьмя концами. В квантовой электродинамике возможны три такие простейшие диаграммы:



Первая из них описывает рассеяние фотона на фотоне. Остальные представляют собой отдельные члены радиационных поправок — к рассеянию фотона на электроне (диаграмма б)) и к рассеянию электрона на электроне (диаграмма в)).

Этот параграф посвящен изучению некоторых общих свойств диаграмм такого рода. Но для упрощения и конкретности мы будем вести изложение применительно к определенной диаграмме — (126,1, а).

<sup>1)</sup> Karplus R., Klein A. // Phys. Rev. — 1952. — Vol. 87. — P. 848.