Это и есть уравнение Шредингера для позитрония в импульсном представлении (см. III (130,4)).

Если бы мы ограничились для $\tilde{\Gamma}$ диаграммами (125,2), но учли бы в них (а также и в $\mathcal{G}$) следующие члены разложения по $1/c$, мы получили бы уравнение Брейта (см. § 83). Учет же диаграмм из (125,4) (вместе с дальнейшими членами разложения по $1/c$) дает радиационные поправки к уровням позитрония; однако вычисления становятся очень сложными.

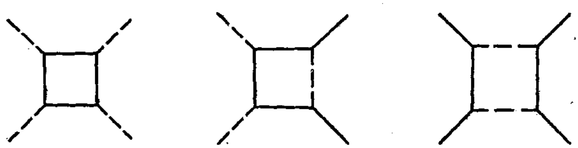
Приведем вычисленную с этими поправками разность основных уровней орто- и парапозитрония[1]:

$$E(^3S_1) - E(^1S_0) = \alpha^2 \frac{me^4}{2\hbar^2}\left\{\frac{7}{6} - \left(\frac{16}{9} + \ln 2\right)\frac{\alpha}{\pi} - i\,\frac{\alpha}{2}\right\}. \qquad (125,19)$$

Первый член в фигурных скобках — тонкое расщепление (см. задачу 2, § 84). Второй член — радиационная поправка к разности уровней. Мнимая же часть разности связана с вероятностью аннигиляции парапозитрония (см. (89,4)), т. е. с комплексностью уровня $^1S_0$; для парапозитрония ширина уровня оказывается того же порядка величины, что и радиационная поправка к его вещественной части.

§ 126. Двойное дисперсионное соотношение

Следующим по сложности за вершинной частью с тремя внешними линиями является блок с четырьмя концами. В квантовой электродинамике возможны три такие простейшие диаграммы:



а *б* *в* (126,1)

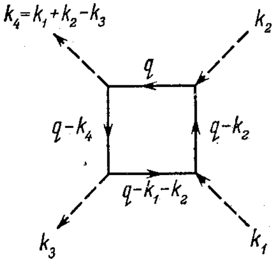
Первая из них описывает рассеяние фотона на фотоне. Остальные представляют собой отдельные члены радиационных поправок — к рассеянию фотона на электроне (диаграмма *б*)) и к рассеянию электрона на электроне (диаграмма *в*)).

Этот параграф посвящен изучению некоторых общих свойств диаграмм такого рода. Но для упрощения и конкретности мы будем вести изложение применительно к определенной диаграмме — (126,1, *а*).

---

[1]) *Karplus R., Klein A.*//Phys. Rev. — 1952. — Vol. 87. — P. 848.

Импульсы линий такой диаграммы обозначим следующим образом:



(126,2)

4-импульсы k_1, k_2, k_3, k_4 отвечают реальным фотонам, так что их квадраты равны нулю.

Отделив зависимость от поляризаций фотонов, амплитуду M_{fi}, соответствующую диаграмме (126,2), можно выразить через несколько скалярных функций 4-импульсов фотонов. Это — инвариантные амплитуды, о которых шла речь в § 70; конкретное выделение их для рассеяния фотона на фотоне будет произведено в следующем параграфе. Будучи скалярными, они зависят лишь от скалярных же переменных, в качестве которых можно выбрать, например, любые две из величин

$$s=(k_1+k_2)^2,\quad t=(k_1-k_3)^2,\quad u=(k_1-k_4)^2,\quad s+t+u=0; \tag{126,3}$$

ниже мы выбираем в качестве независимых s и t.

Каждую из инвариантных амплитуд (которые мы обозначим здесь той же буквой M) можно представить интегралом вида

$$M=\int\frac{iB\,d^4q}{[q^2-m^2]\,[(q-k_4)^2-m^2]\,[(q-k_1-k_2)^2-m^2]\,[(q-k_2)^2-m^2]},$$
$$m^2\to m^2-i0, \tag{126,4}$$

где B — некоторая функция всех 4-импульсов; множители в знаменателе происходят от пропагаторов четырех виртуальных электронов.

При достаточно малых s и t амплитуды M вещественны (точнее, могут быть сделаны таковыми надлежащим выбором фазового множителя). Действительно, малость s обеспечивает невозможность рождения фотонами реальных частиц (электрон-позитронной пары) в s-канале, а малость t — такую же невозможность в t-канале[1]). Другими словами, в обоих каналах от-

[1]) Изображенные на диаграмме (126,2) направления внешних линий отвечают s-каналу. В t-канале входящими должны быть линии 1 и 3, так что 4-импульсами начальных фотонов были бы k_1 и $-k_3$. Физические области для рассеяния фотона на фотоне в переменных s, t, u — заштрихованные секторы на рис. 8 (с. 300). Так, s-каналу отвечает область, в которой $s>0$, $t<0$, $u<0$.

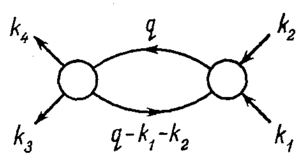
сутствуют реальные промежуточные состояния, которые могли бы, согласно условию унитарности, привести к появлению мнимой части амплитуды.

Будем теперь увеличивать s при фиксированном (малом) значении t. При $s \geqslant 4m^2$ у амплитуды M появится мнимая часть, связанная с возможностью рождения пары двумя фотонами в s-канале. Поэтому для M можно написать дисперсионное соотношение «по переменной s»:

$$M(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_{1s}(s', t)}{s' - s - i0}\, ds', \qquad (126,5)$$

где $A_{1s}(s, t)$ обозначает мнимую часть $M(s, t)$.

Как и для всякой диаграммы вида

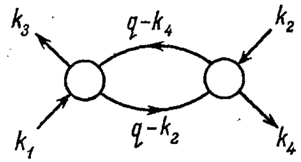


$A_{1s}(s, t)$ вычисляется по правилу (115,9) заменой в интеграле (126,4) соответствующих полюсных множителей δ-функциями:

$$2iA_{1s}(s, t) = (2\pi i)^2 \int \frac{iB\delta(q^2 - m^2)\, \delta[(q - k_1 - k_2)^2 - m^2]}{[(q - k_4)^2 - m^2]\,[(q - k_2)^2 - m^2]}\, d^4q, \qquad (126,6)$$

причем интегрирование производится по половине q-пространства, в которой $q^0 > 0$.

Мы можем сделать существенный дальнейший шаг, заметив, что интеграл (126,6) имеет структуру (в смысле своих полюсных множителей) того же типа, что и амплитуда реакции, изображающейся диаграммой вида



Поэтому и аналитические свойства $A_{1s}(s, t)$ как функции от t подобны аналитическим свойствам этой амплитуды. В частности, у функции $A_{1s}(s, t)$ может появиться (при увеличении t) мнимая часть только тогда, когда оба множителя в знаменателе будут одновременно обращаться в нуль. Это, однако, не произойдет сразу же после достижения значения $t = 4m^2$ — порога рождения пары в t-канале. Дело в том, что наличие δ-функций в подынтегральном выражении ограничивает область интегрирования в q-пространстве, которая может оказаться несовместимой со значением $t = 4m^2$. Протяженность области интегрирования зависит от значения s (аргументы δ-функций содержат k_1 и k_2). Поэтому зависит от s и граничное значение $t = t_c(s)$, за которым функция $A_{1s}(s, t)$ становится комплексной.

Подобно тому как функция $M(s, t)$ выражается через свою мнимую часть $A_{1s}(s, t)$ формулой (126,5), функция $A_{1s}(s, t)$ в свою очередь выражается через $A_2(s, t) = \operatorname{Im} A_{1s}(s, t)$ дисперсионным соотношением «по переменной t»:

$$A_{1s}(s, t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{t_c(s)}^{\infty} \frac{A_2(s, t')}{t' - t - i0}\, dt'. \tag{126,7}$$

Подставив теперь (126,7) в (126,5), получим *двойное дисперсионное соотношение*, или *представление Мандельстама* для амплитуды $M(s, t)$:

$$M(s, t) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{4m^2}^{\infty} \int\limits_{t_c(s')}^{\infty} \frac{A_2(s', t')}{(s' - s - i0)(t' - t - i0)}\, dt'\, ds' \tag{126,8}$$

(*S. Mandelstam*, 1958).

Функцию $A_2(s, t)$ называют *двойной спектральной плотностью* функции $M(s, t)$. Ее можно получить из интеграла (126,6) повторным применением к нему правила замены (115,9). Обозначив для краткости

$$l_1 = q, \quad l_2 = q - k_4, \quad l_3 = q - k_2, \quad l_4 = q - k_1 - k_2, \tag{126,9}$$

получим

$$(2i)^2 A_2(s, t) =$$
$$= (2\pi i)^4 \int iB\delta\left(l_1^2 - m^2\right)\delta\left(l_2^2 - m^2\right)\delta\left(l_3^2 - m^2\right)\delta\left(l_4^2 - m^2\right) d^4q, \tag{126,10}$$

причем интегрирование производится по области $q^0 > 0$.

Следует, однако, иметь в виду, что формула (126,10) имеет лишь символический смысл. Дело в том, что область $s > 0$, $t > 0$ — нефизическая. Соответственно в этой области величины $l_1, l_2, \ldots$ при вещественных q оказываются, вообще говоря, комплексными; понятие же δ-функции при комплексных значениях аргумента не является полностью определенным. Точнее было бы говорить прямо о взятии вычетов в соответствующих полюсах исходного интеграла (126,4). В нашем случае это, однако, не играет роли. Условие обращения в нуль четырех знаменателей в (126,4) или четырех аргументов δ-функций полностью определяет компоненты 4-вектора q. Переходя к интегрированию по $l_1^2, l_2^2, \ldots$ (см. ниже) и формально оперируя с интегралом (126,10) по обычным правилам, мы найдем (с точностью до знака) выражение для A_2.

Для дальнейших вычислений выберем систему центра инерции (в s-канале). Тогда

$$k_1=(\omega,\ \mathbf{k}),\quad k_2=(\omega,\ -\mathbf{k}),\quad k_3=(\omega,\ \mathbf{k}'),\quad k_4=(\omega,\ -\mathbf{k}'),\tag{126,11}$$

$$\begin{gathered} s=4\omega^2,\quad t=-(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2=-4\omega^2\sin^2(\theta/2),\\ u=-(\mathbf{k}+\mathbf{k}')^2=-4\omega^2\cos^2(\theta/2), \end{gathered}\tag{126,12}$$

где θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ (угол рассеяния). Ось x пространственных декартовых координат направим по вектору $\mathbf{k}+\mathbf{k}'$, а ось y — по $\mathbf{k}-\mathbf{k}'$ [1]).

Преобразуем теперь интеграл (126,10), выбрав квадраты $l_1^2, l_2^2, \ldots$ в качестве новых переменных интегрирования (вместо четырех компонент q). Имеем

$$\frac{\partial\left(l_1^2\right)}{\partial q^\mu}=2l_{1\mu},\ \ldots,$$

поэтому якобиан преобразования

$$\frac{\partial\left(l_1^2,\ l_2^2,\ l_3^2,\ l_4^2\right)}{\partial\left(q^0,\ q_x,\ q_y,\ q_z\right)}=16D,$$

где D — определитель, составленный из 16 компонент 4-векторов l_1, l_2, l_3, l_4. Интегрирование в (126,10) сводится просто к замене функций B и D в подынтегральном выражении их значениями при [2])

$$l_1^2=l_2^2=l_3^2=l_4^2=m^2.\tag{126,13}$$

Из условий $l_1^2=l_4^2=m^2$ получаем, как и в § 115,

$$q^0=\omega,\qquad \mathbf{q}^2=\omega^2-m^2.\tag{126,14}$$

Остальные два условия дают

$$\begin{gathered} (q-k_4)^2-m^2=-2qk_4=-2\omega^2-2\mathbf{q}\mathbf{k}'=0,\\ (q-k_2)^2-m^2=-2\omega^2-2\mathbf{q}\mathbf{k}=0, \end{gathered}$$

так что

$$\mathbf{q}\mathbf{k}=\mathbf{q}\mathbf{k}'=-s/4,$$

---

[1]) При $t>0$: $(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2<0$, т. е. вектор $\mathbf{k}-\mathbf{k}'$ мнимый. Это затруднение, однако, легко обойти, раскрыв все векторные выражения при $t<0$ и произведя затем аналитическое продолжение к $t>0$.

[2]) Такой способ интегрирования автоматически учитывает лишь по одному из нулей аргументов δ-функций.

или в компонентах:

$$q^0 = \omega, \quad q_x = -\frac{s}{2(s+t)}, \quad q_y = 0,$$

$$q_z = \pm\sqrt{\omega^2 - m^2 - q_x^2} = \pm\left[\frac{st - 4m^2(s+t)}{4(s+t)}\right]^{1/2}. \qquad (126,15)$$

Таким образом, интеграл (126,10) равен

$$A_2(s, t) = \frac{\pi^4}{4D}\sum(-iB), \qquad (126,16)$$

где суммирование производится по двум значениям $\mathbf{q}$ из (126,15).

Определитель D можно записать с помощью единичного антисимметричного тензора:

$$D = e_{\mu\nu\rho\sigma} l_1^\mu l_2^\nu l_3^\rho l_4^\sigma = -e_{\mu\nu\rho\sigma} q^\mu k_4^\nu k_2^\rho k_1^\sigma =$$
$$= -e_{\mu\nu\rho\sigma}(q-k_1)^\mu (k_4-k_1)^\nu (k_2-k_1)^\rho k_1^\sigma$$

(при преобразованиях использована антисимметрия $e_{\mu\nu\rho\sigma}$). Заметив, что из четырех множителей временную компоненту имеет только k_1, находим

$$D = -\omega\mathbf{q}\,[(\mathbf{k}+\mathbf{k}')(\mathbf{k}-\mathbf{k}')].$$

Раскрыв это выражение при $t < 0$ и затем продолжив к $t > 0$, получим

$$D = -\omega q_z \sqrt{s+t}\sqrt{-t} \to \pm\frac{i}{4}\{st\,[st - 4m^2(s+t)]\}^{1/2}. \qquad (126,17)$$

Выбор знака в этом выражении можно произвести на основании следующих соображений. Положим для простоты $B = 1$. Тогда видно, что в физической области ($s > 0$, $t < 0$) имеем $A_{1s}(s, t) < 0$. Действительно, оба знаменателя в подынтегральном выражении в (126,6) имеют одинаковый (отрицательный) знак:

$$(q-k_4)^2 - m^2 = -2\omega^2 - 2\mathbf{q}\mathbf{k}' < -2\omega(\omega - |\mathbf{q}|) < 0,$$
$$(q-k_2)^2 - m^2 = -2\omega^2 - 2\mathbf{q}\mathbf{k} < -2\omega(\omega - |\mathbf{q}|) < 0$$

(здесь использовано, что, в силу наличия двух δ-функций в числителе, имеет место (126,14) и потому $|\mathbf{q}| < \omega$)[1]). Из (126,7) видно тогда, что отрицательна должна быть и функция $A_2(s, t)$ при $s > 0$, $t > 0$ (если учесть, что, согласно (126,16), эта функ-

[1]) Разумеется, это не случайно. Отрицательность A_{1s} в действительности следует из условия унитарности, что особенно ясно при $t = 0$, когда A_{1s} определяет полное сечение.

ция знакопостоянна). Это значит, что в (126,17) надо выбрать верхний знак, так что окончательно

$$A_2 = -\pi^4 \frac{\sum B}{\{st\,[st - 4m^2\,(s+t)]\}^{1/2}}\,. \tag{126,18}$$

Так как по своему смыслу функция $A_2(s, t)$ должна быть вещественна, то кроме положительности s и t имеется еще условие положительности выражения в квадратных скобках в знаменателе:

$$st - 4m^2(s+t) \geqslant 0, \quad s > 0, \ t > 0. \tag{126,19}$$

Эти неравенства определяют область, по которой должно производиться интегрирование в двойном дисперсионном интеграле (126,8) (заштрихована на рис. 23). Ее границей является кривая

$$st - 4m^2(s+t) = 0$$

с асимптотами $s = 4m^2$ и $t = 4m^2$.

Дисперсионные соотношения в форме (126,5) и (126,8) еще не учитывают условий перенормировки, и при буквальном их применении интегралы оказались бы расходящимися и требовали бы регуляризации. Условие перенормировки для амплитуд $M(s, t)$ заключается в требовании

$$M(0,\ 0) = 0. \tag{126,20}$$

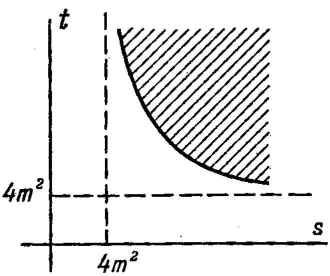


Рис. 23

Действительно, амплитуда рассеяния фотона на фотоне должна обращаться в нуль, когда $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ (а потому и $s = t = 0$), поскольку $k = 0$ означает постоянный во времени и пространстве потенциал, которому не отвечает никакое физическое поле (мы еще обсудим это условие более детально в следующем параграфе).

Для автоматического учета этого условия надо написать дисперсионное соотношение «с вычитанием» (подобно переходу от (111,8) к (111,13)). Мы придем к такому соотношению естественным образом, произведя сначала тождественное преобразование соотношения (126,8) с помощью тождества

$$\frac{1}{(s'-s)(t'-t)} = \\ = \frac{st}{(s'-s)(t'-t)\,s't'} + \frac{s}{(s'-s)\,s't'} + \frac{t}{(t'-t)\,s't'} + \frac{1}{s't'}\,.$$

Подставив его в подынтегральное выражение в (126,8), получим

$$M(s, t) = \frac{st}{\pi^2} \int\int \frac{A_2(s', t')\, ds'\, dt'}{(s'-s)(t'-t)s't'} + \frac{s}{\pi} \int \frac{f(s')\, ds'}{(s'-s)s'} + \\ + \frac{t}{\pi} \int \frac{g(t')\, dt'}{(t'-t)t'} + C,$$

где

$$f(s) = \frac{1}{\pi} \int \frac{A_2(s, t')}{t'} dt', \qquad g(t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{A_2(s', t)}{s'} ds',$$

$$C = \frac{1}{\pi^2} \int\int \frac{A_2(s', t')}{s't'} ds'\, dt'.$$

Последние равенства, однако, имели бы смысл лишь при условии сходимости всех интегралов. В противном же случае функциям $f(s)$, $g(t)$ и постоянной C должны быть предписаны заранее заданные значения, соответствующие условию перенормировки. Именно надо положить

$$C = 0, \quad f(s) = A_{1s}(s, 0), \quad g(t) = A_{1t}(0, t),$$

где A_{1t} — мнимая часть $M(s, t)$, появляющаяся при увеличении t при заданном малом s, подобно тому как A_{1s} — мнимая часть, появляющаяся при увеличении s при заданном малом t. Первое из этих равенств очевидно: $C = M(0, 0) = 0$. Второе (и аналогичным образом третье) следует из сравнения равенства

$$M(s, 0) = \frac{s}{\pi} \int \frac{f(s')\, ds'}{(s'-s)s'}$$

с однократным дисперсионным соотношением (126,5), написанным «с вычитанием», отвечающим условию (126,20):

$$M(s, t) = \frac{s}{\pi} \int \frac{A_{1s}(s', t)}{(s'-s)s'} ds'. \tag{126,21}$$

Таким образом, окончательное двойное дисперсионное соотношение «с вычитанием»:

$$M(s, t) = \frac{st}{\pi^2} \int\int \frac{A_2(s', t')}{(s'-s)(t'-t)s't'} ds'\, dt' + \\ + \frac{s}{\pi} \int \frac{A_{1s}(s', 0)}{(s'-s)s'} ds' + \frac{t}{\pi} \int \frac{A_{1t}(0, t')}{(t'-t)t'} dt'. \tag{126,22}$$

Если значения s, t сами лежат в области интегрирования, то интегралы (126,21—22), как всегда, надо понимать как предел при

$$s \to s + i0, \quad t \to t + i0. \tag{126,23}$$