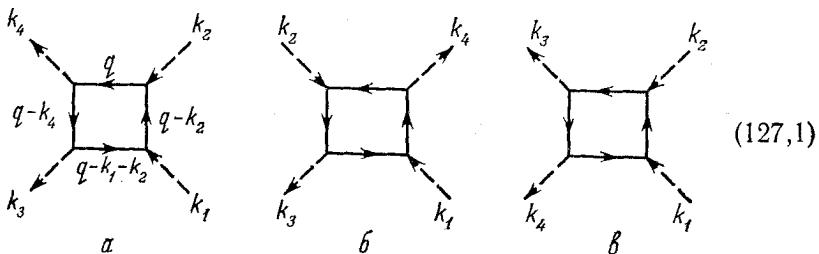


### § 127. Рассеяние фотона на фотоне

Рассеяние света на свете (в вакууме) является специфически квантовоэлектродинамическим процессом; в классической электродинамике оно отсутствует из-за линейности уравнений Максвелла<sup>1)</sup>.

В квантовой электродинамике рассеяние фотона на фотоне описывается как результат рождения двумя начальными фотонами виртуальной электрон-позитронной пары и последующей аннигиляции этой пары в конечные кванты. Амплитуда этого процесса (в первом неисчезающем приближении) изображается шестью «квадратными» диаграммами со всеми возможными относительными расположениями их четырех концов. Сюда относятся диаграммы



и еще три диаграммы, отличающиеся от этих лишь изменением направления обхода внутренней электронной петли. Вклад этих последних совпадает с вкладом диаграмм (127,1), и потому полная амплитуда рассеяния

$$M_{fi} = 2(M^{(a)} + M^{(b)} + M^{(c)}), \quad (127,2)$$

где  $M^{(a)}$ ,  $M^{(b)}$ ,  $M^{(c)}$  — вклады диаграмм  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

Согласно (64,19) сечение рассеяния

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} |M_{fi}|^2 \frac{d\omega'}{(2\omega)^2}, \quad (127,3)$$

где  $d\omega'$  — элемент телесных углов для направления  $\mathbf{k}'$  в системе центра инерции. Угол рассеяния в этой системе обозначим  $\theta$ .

#### Инвариантные амплитуды

Выделив поляризационные множители четырех фотонов, представим  $M_{fi}$  в виде

$$M_{fi} = e_1^\lambda e_2^\mu e_3^\nu e_4^\rho * M_{\lambda\mu\nu\rho}; \quad (127,4)$$

<sup>1)</sup> В предельном случае малых частот этот процесс был впервые рассмотрен Эйлером (*H. Euler*, 1936), а в ультрарелятивистском случае — А. И. Ахизером (1937). Полное решение задачи дано Карплусом и Нейманом (*R. Karplus, M. Neumann*, 1951).

4-тензор  $M_{\lambda\mu\nu\rho}$  (его называют тензором рассеяния фотона на фотоне) — функция 4-импульсов всех фотонов. Если написать аргументы функций со знаками, отвечающими одинаковым направлениям внешних концов диаграммы, то в силу симметрии совокупности диаграмм (127,1) очевидно, что тензор

$$M_{\lambda\mu\nu\rho}(k_1, k_2, -k_3, -k_4)$$

будет симметричен по отношению к любым перестановкам четырех аргументов вместе с одновременной такой же перестановкой его четырех индексов. В силу калибровочной инвариантности амплитуда (127,4) не должна меняться при замене  $e \rightarrow e + + \text{const} \cdot k$ . Другими словами, должно быть

$$k_1^\lambda M_{\lambda\mu\nu\rho} = k_2^\mu M_{\lambda\mu\nu\rho} = \dots = 0. \quad (127,5)$$

Как легко сообразить, отсюда следует, в частности, что разложение тензора рассеяния по степеням 4-импульсов  $k_1, k_2, \dots$  должно начинаться с членов, содержащих четверные произведения их компонент. Тем самым во всяком случае

$$M_{\lambda\mu\nu\rho}(0, 0, 0, 0) = 0. \quad (127,6)$$

Для конкретного выделения инвариантных амплитуд целесообразно, однако, с самого начала выбрать определенную калибровку 4-векторов поляризации  $e$  — калибровку, в которой

$$e_1^\mu = (0, \mathbf{e}_1), \quad e_2^\mu = (0, \mathbf{e}_2), \dots \quad (127,7)$$

Тогда

$$M_{fi} = M_{iklm} e_{1i} e_{2k} e_{3l}^* e_{4m}^*, \quad (127,8)$$

где  $M_{iklm}$  — трехмерный тензор.

В качестве двух независимых поляризаций выберем для каждого из фотонов круговые поляризации с противоположными направлениями вращения, т. е. два спиральных состояния со спиральностями  $\lambda = \pm 1$ . После этого тензор  $M_{iklm}$  можно представить в виде

$$M_{iklm} = \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} e_{1i}^{(\lambda_1)*} e_{2k}^{(\lambda_2)*} e_{3l}^{(\lambda_3)} e_{4m}^{(\lambda_4)}, \quad (127,9)$$

16 величин  $M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}$  являются функциями от  $s, t, u$  и играют роль инвариантных амплитуд; не все они, однако, независимы.

Величины  $M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}$  — трехмерные скаляры. Пространственная инверсия меняет знак спиральностей; инвариантные же пе-

переменные  $s$ ,  $t$ ,  $u$  остаются неизменными. Поэтому требование  $P$ -инвариантности приводит к соотношениям

$$M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s, t, u) = M_{-\lambda_1 -\lambda_2 -\lambda_3 -\lambda_4}(s, t, u). \quad (127,10)$$

Обращение времени переставляет начальные и конечные фотоны, не меняя их спиральностей; переменные  $s$ ,  $t$ ,  $u$  снова остаются неизменными. Поэтому требование  $T$ -инвариантности приводит к равенству

$$M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s, t, u) = M_{\lambda_3 \lambda_4 \lambda_1 \lambda_2}(s, t, u). \quad (127,11)$$

Наконец, еще одно соотношение является следствием инвариантности амплитуды  $M_{fi}$  относительно перестановки двух начальных или двух конечных фотонов. Если произвести сразу обе перестановки ( $k_1 \leftrightarrow k_2$ ,  $k_3 \leftrightarrow k_4$ ), то переменные  $s$ ,  $t$ ,  $u$  не изменятся, а перестановка в поляризационных индексах приведет к соотношению

$$M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s, t, u) = M_{\lambda_1 \lambda_4 \lambda_3 \lambda_2}(s, t, u). \quad (127,12)$$

Легко убедиться, что в силу свойств симметрии (127,10—12) число независимых инвариантных амплитуд сводится к пяти; в качестве них можно, например, выбрать

$$M_{++++}, \quad M_{++--}, \quad M_{+-+-}, \quad M_{+-+-}, \quad M_{+--+}$$

(индексы «+», «—» означают спиральности +1 и —1).

Если подставить в (127,3) вместо  $M_{fi}$  одну из амплитуд  $M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}$ , то мы получим сечение рассеяния с заданными поляризациями начальных и конечных фотонов. Сечение же, просуммированное по конечным и усредненное по начальным поляризациям, получится заменой

$$|M_{fi}|^2 \rightarrow 1/4 \{ 2|M_{++++}|^2 + 2|M_{++--}|^2 + 2|M_{+-+-}|^2 + 2|M_{+-+-}|^2 + 8|M_{+--+}|^2 \}. \quad (127,13)$$

Соотношения симметрии (127,10—12) связывают между собой различные инвариантные амплитуды как функции одних и тех же переменных. Дальнейшие функциональные соотношения возникают как следствие перекрестной симметрии (см. § 78), если учесть, что амплитуда  $M_{fi}$  во всех каналах описывает одну и ту же реакцию (взаимное рассеяние двух фотонов) и потому не должна меняться при переходе от одного канала к другому.

Переход от  $s$ -канала (к которому отвечает направление стрелок на диаграммах (127,1)) к  $t$ -каналу осуществляется перестановкой 4-импульсов  $k_2$  и  $-k_3$  (заменой переменных  $s \leftrightarrow t$ ) и перестановкой индексов спиральностей  $\lambda_2 \leftrightarrow -\lambda_3$ . Аналогичным

образом, переход от  $s$ - к  $u$ -каналу осуществляется перестановкой  $k_2$  и  $-k_4$  (причем  $s \leftrightarrow u$ ) и заменой  $\lambda_2 \leftrightarrow -\lambda_4$ . Это приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} M_{+-+-}(s, t, u) &= M_{++++}(u, t, s), \\ M_{+---}(s, t, u) &= M_{++++}(t, s, u), \\ M_{++++}(s, t, u) &= M_{++++}(s, u, t), \end{aligned} \quad (127,14)$$

$M_{+-+}$  и  $M_{++-}$  полностью симметричны по переменным  $s, t, u$ <sup>1)</sup>. Поэтому достаточно вычислить лишь 3 из 16 амплитуд, например

$$M_{++++}, \quad M_{+---}, \quad M_{++--}.$$

Соотношения (127,10—12), (127,14) относятся к полным амплитудам — суммам вкладов всех трех диаграмм (127,1). Но сами эти вклады связаны между собой соотношениями, очевидными из сравнения диаграмм. Так, диаграмма б) получается из а) заменой  $k_2 \leftrightarrow -k_4, e_2 \leftrightarrow e_4^*$ , и потому их вклады в инвариантные амплитуды получаются друг из друга заменой переменных  $s \leftrightarrow u$  и индексов  $\lambda_2 \leftrightarrow -\lambda_4$ ; аналогично вклад диаграммы в) получится из а) заменой  $t \leftrightarrow u, \lambda_3 \leftrightarrow -\lambda_4$ .

### Вычисление амплитуд

Интеграл  $M_{fi}^{(a)}$ , отвечающий диаграмме (127,1, a), имеет вид (126,4), причем

$$\begin{aligned} B^{(a)} = \frac{e^4}{\pi^2} \text{Sp} \{ & (\gamma e_1)(\gamma q - \gamma k_2 + m)(\gamma e_2)(\gamma q + m) \times \\ & \times (\gamma e_4^*)(\gamma q - \gamma k_4 + m)(\gamma e_3^*)(\gamma q - \gamma k_1 - \gamma k_2 + m) \}. \end{aligned} \quad (127,15)$$

Интегралы (126,4) логарифмически расходятся. В соответствии с условием (127,6) их регуляризация осуществляется вычитанием значения при  $k_1 = k_2 = \dots = 0$ <sup>2)</sup>. Вычисление регуляризованных интегралов, однако, чрезвычайно громоздко.

Наиболее естественный путь для вычисления амплитуд рассеяния фотона на фотоне основан на использовании двойного

<sup>1)</sup> Здесь учтена также симметрия по отношению к паре конечных фотонов. Поскольку три переменные  $s, t, u$  не независимы, достаточно было было писать два аргумента (например, два первых); мы сохраним все три лишь с целью более ясного выявления симметрий их перестановок.

<sup>2)</sup> Отметим, что при суммировании вкладов всех диаграмм расходящиеся части интегралов сокращаются. В этом легко убедиться, заметив, что асим-

дисперсионного соотношения (*B. De Tollis*, 1964). Этот метод наиболее полно учитывает симметрию диаграмм и почти полностью исключает трудности интегрирования.

Функция  $A_{1s}^{(a)}(s, t)$  (и аналогично  $A_{1t}^{(a)}$ ) для каждого заданного набора спиральностей  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  вычисляется согласно (126,6). Ввиду наличия под интегралом двух  $\delta$ -функций нам нужно знать значение  $B^{(a)}$  лишь при

$$l_1^2 = q^2 = m^2, \quad l_4^2 = (q - k_1 - k_2)^2 = m^2; \quad (127,16)$$

эти равенства можно учитывать уже при вычислении следа (127,15). Но для дальнейшей подстановки в (126,22) нам фактически требуется значение  $A_{1s}^{(a)}$  лишь при  $t = 0$ . (Это равенство означает, что  $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$  и  $k_2 = k_4$ .) Тогда интеграл (126,6) принимает вид

$$A_{1s}^{(a)}(s, 0) = -\frac{\pi^2}{4} \sqrt{\frac{s - 4m^2}{s}} \int \frac{B^{(a)} d\sigma_q}{[(q - k_2)^2 - m^2]^2} \quad (127,17)$$

(ср. вывод (115,10)). Введя угол  $\vartheta$  между  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{k}$ , получим

$$(q - k_2)^2 - m^2 = -2\omega(1 - |\mathbf{q}| \cos \vartheta) = -\sqrt{s} \left[ 1 - \frac{1}{2} \sqrt{s - 4m^2} \cos \vartheta \right].$$

Интегралы (127,17) фактически выражаются через элементарные функции. Вычисление же функции  $A_2^{(a)}(s, t)$  согласно ее определению (126,18) вообще не требует интегрирования, при этом выражение для  $B^{(a)}$  должно быть взято для значений  $q$  из (126,15), удовлетворяющих, помимо (127,16), также и условиям  $(q - k_2)^2 = m^2, (q - k_4)^2 = m^2$ .

После вычисления функций  $A_{1s}, A_{1t}, A_2$  дисперсионное соотношение (126,22) дает амплитуду непосредственно в виде однодвукратных определенных интегралов. Приведем окончательный результат для трех инвариантных амплитуд, достаточных,

итогический (при  $q \rightarrow \infty$ ) вид интеграла есть

$$M_{\lambda\mu\nu\rho}^{(a)} \propto \int \text{Sp} \{ \gamma_\lambda(\gamma q) \gamma_\mu(\gamma q) \gamma_\rho(\gamma q) \gamma_\nu(\gamma q) \} \frac{d^4 q}{(q^2)^4}.$$

После усреднения по направлениям  $q$  (ср. (131,10)) след легко вычисляется и дает

$$M_{\lambda\mu\nu\rho}^{(a)} \propto (g_{\lambda\mu}g_{\nu\rho} + g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho} - 2g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu}) \int \frac{d^4 q}{(q^2)^2}.$$

Суммирование по диаграммам означает симметризацию этого выражения по индексам  $\lambda, \mu, \nu, \rho$ , в результате чего оно обращается в нуль. Подчеркнем, однако, что это сокращение имеет в известном смысле случайный характер и не устраняет необходимости регуляризации, хотя она и сводится при этом к вычитанию конечной величины.

согласно сказанному выше, для определения также и всех остальных амплитуд<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\alpha^2} M_{++++} &= -1 - \left(2 + \frac{4t}{s}\right) B(t) - \left(2 + \frac{4u}{s}\right) B(u) - \\ &\quad - \left[\frac{2(t^2 + u^2)}{s^2} - \frac{8}{s}\right] [T(t) + T(u)] + \frac{4}{t} \left(1 - \frac{2}{s}\right) I(s, t) + \\ &\quad + \frac{4}{u} \left(1 - \frac{2}{s}\right) I(s, u) + \left[\frac{2(t^2 + u^2)}{s^2} - \frac{16}{s} - \frac{4}{t} - \frac{4}{u} - \frac{8}{tu}\right] I(t, u), \\ \frac{1}{8\alpha^2} M_{+++-} &= 1 + 4 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u}\right) [T(s) + T(t) + T(u)] - \\ &\quad - 4 \left(\frac{1}{u} + \frac{2}{st}\right) I(s, t) - 4 \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{su}\right) I(s, u) - 4 \left(\frac{1}{s} + \frac{2}{tu}\right) I(t, u), \\ \frac{1}{8\alpha^2} M_{+-+-} &= 1 - \frac{8}{st} I(s, t) - \frac{8}{su} I(s, u) - \frac{8}{tu} I(t, u). \end{aligned} \quad (127,18)$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} B(s) &= \sqrt{1 - \frac{4}{s}} \operatorname{Arsh} \frac{\sqrt{-s}}{2} - 1, \quad s < 0, \\ T(s) &= \left(\operatorname{Arsh} \frac{\sqrt{-s}}{2}\right)^2, \quad s < 0, \\ I(s, t) &= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dy}{y(1-y) - \frac{s+t}{st}} \{ \ln [1 - i0 - sy(1-y)] + \\ &\quad + \ln [1 - i0 - ty(1-y)] \}, \end{aligned} \quad (127,19)$$

выражения же в областях  $0 < s < 4$  и  $s > 4$  получаются из (127,19) путем аналитического продолжения по правилу  $s \rightarrow s + i0$ , т. е. через верхнюю полуплоскость этих переменных. (Для упрощения записи в формулах (127,18—19), и только в них, буквы  $s$  и  $t$  обозначают отношения  $s/m^2$ ,  $t/m^2$ .)

### Сечение рассеяния

Предельному случаю малых частот ( $\omega \ll m$ ) отвечают малые значения переменных  $s$ ,  $t$ ,  $u$ . Первые члены разложения инвариантных амплитуд по этим переменным:

$$\begin{aligned} M_{++++} &\approx \frac{11e^4}{45m^4} s^2, \quad M_{+---} \approx \frac{11e^4}{45m^4} t^2, \quad M_{+-+-} \approx \frac{11e^4}{45m^4} u^2, \\ M_{+-+-} &\approx -\frac{e^4}{15m^4} (s^2 + t^2 + u^2), \quad M_{+++-} \approx 0. \end{aligned} \quad (127,20)$$

<sup>1)</sup> Некоторые детали преобразований интегралов, различные представления трансцендентных функций  $B$ ,  $T$ ,  $I$  и их предельные выражения — см. *De Tollis B.* // *Nuovo Cimento*. — 1964. — Vol. 32. — P. 757; 1965. — Vol. 35. — P. 1182; *Costantini V.*, *De Tollis B.*, *Pistoni G.* // *Nuovo Cimento*. — 1971. — Vol. 2A. — P. 733.

Подставив эти выражения в формулу (127,3), получим сечения рассеяния поляризованных фотонов. Дифференциальное же сечение рассеяния неполяризованных фотонов вычисляется согласно (127,13) и равно (в обычных единицах)

$$d\sigma = \frac{139}{4\pi^2 (90)^2} \alpha^2 r_e^2 \left( \frac{\hbar\omega}{mc^2} \right)^6 (3 + \cos^2 \theta) d\Omega, \quad (127,21)$$

**а** полное сечение<sup>1)</sup>

$$\sigma = \frac{973}{10125\pi} \alpha^2 r_e^2 \left( \frac{\hbar\omega}{mc^2} \right)^6 = 0,031 \alpha^2 r_e^2 \left( \frac{\hbar\omega}{mc^2} \right)^6, \quad \hbar\omega \ll mc^2. \quad (127,22)$$

В обратном, ультрарелятивистском случае полное сечение рассеяния неполяризованных фотонов<sup>2)</sup>

$$\sigma = 4,7 \alpha^4 \left( \frac{c}{\omega} \right)^2, \quad \hbar\omega \gg mc^2. \quad (127,23)$$

Наконец, укажем дифференциальное сечение рассеяния на малые углы в ультрарелятивистском случае:

$$d\sigma = \frac{\alpha^4 c^2}{\pi^2 \omega^2} \ln^4 \frac{1}{\theta} d\Omega, \quad \frac{mc^2}{\hbar\omega} \ll \theta \ll 1. \quad (127,24)$$

Это выражение справедливо с логарифмической точностью — следующий член разложения содержит на единицу меньшую степень большого логарифма. Для перехода к пределу  $\theta = 0$  (рассеяние вперед) формула (127,24) непригодна. Вместо нее имеем здесь

$$d\sigma = \frac{\alpha^4 c^2}{\pi^2 \omega^2} \ln^4 \frac{\hbar\omega}{mc^2} d\Omega, \quad \theta \ll \frac{mc^2}{\hbar\omega}. \quad (127,25)$$

Это выражение легко получить с помощью общих формул (127,18), положив в них  $t = 0$  и заметив, что при  $s \gg 1$  наиболее высокую (вторую) степень большого логарифма содержит лишь функция

$$T\left(\frac{s}{m^2}\right) \approx \frac{1}{4} \ln^2 \frac{s}{m^2} \approx \ln^2 \frac{\omega}{m}.$$

С этой точностью отличны от нуля лишь амплитуды

$$M_{++++} = M_{----} = M_{+-+-} = -16e^4 \ln^2(\omega/m).$$

Мы видим, в частности, что в этом случае поляризация фотона при рассеянии не меняется.

<sup>1)</sup> При переходе от  $d\sigma$  к  $\sigma$  надо ввести множитель  $1/2$ , учитывающий тождественность двух конечных фотонов.

<sup>2)</sup> К происхождению этой зависимости  $\sigma$  от  $\omega$  мы еще вернемся в конце § 134.

На рис. 24 изображен график зависимости полного сечения рассеяния от частоты (в логарифмической, по обеим осям, шкале). Сечение убывает в сторону как малых, так и больших частот и достигает максимума при  $\hbar\omega \approx 1,5mc^2$ . Излом кривой при  $\hbar\omega = mc^2$  отражает изменение характера процесса в связи с появлением возможности образования реальной электронной пары.

### Случай малых частот

В случае малых частот ( $\omega \ll m$ ) амплитуду рассеяния фотона на фотоне можно получить также и совсем иным способом, исходя из поправочных членов в функции Лагранжа слабого электромагнитного поля (см. ниже, § 129).

Малая поправка к гамильтониану взаимодействия  $\hat{V}'$  отличается лишь знаком от малой поправки к лагранжиану. Согласно (129,21) имеем

$$\hat{V}' = -\frac{e^4}{45 \cdot 8\pi^2 m^4} \int \{ (\hat{\mathbf{E}}^2 - \hat{\mathbf{H}}^2)^2 + 7(\hat{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{H}})^2 \} d^3x. \quad (127,26)$$

Поскольку этот оператор — четвертого порядка по полю, он имеет матричные элементы для интересующего нас перехода уже в первом приближении.

Для вычисления надо подставить в (127,26)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}} &= -\frac{\partial \hat{\mathbf{A}}}{\partial t}, \quad \hat{\mathbf{H}} = \text{rot } \hat{\mathbf{A}}, \\ \hat{\mathbf{A}} &= \sqrt{4\pi} \sum_{k\lambda} (\hat{c}_{k\lambda} \mathbf{e}_{k\lambda} e^{-ikx} + \hat{c}_{k\lambda}^+ \mathbf{e}_{k\lambda}^* e^{ikx}) \end{aligned} \quad (127,27)$$

( $\lambda$  — номер поляризации), после чего элемент  $S$ -матрицы вычисляется как

$$S_{fi} = -i \langle f | \int V' dt | i \rangle = -i \langle 0 | c_{k_3\lambda_3} c_{k_4\lambda_4} \int V' dt c_{k_1\lambda_1}^+ c_{k_2\lambda_2}^+ | 0 \rangle \quad (127,28)$$

(ср. § 72, 77). При нормировке  $\hat{\mathbf{A}}$ , как в (127,27), амплитуда рассеяния  $M_{fi}$  непосредственно определяется по  $S_{fi}$  согласно

$$S_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_3 + k_4 - k_1 - k_2) M_{fi} \quad (127,29)$$

(ср. § 64). Среднее значение в (127,28) вычисляется по теореме Вика с помощью (77,3), причем свертывать надо, разумеется, только «внешние» операторы  $\hat{c}_{k\lambda}$ ,  $\hat{c}_{k\lambda}^+$  с внутренними  $\hat{\mathbf{A}}$ .

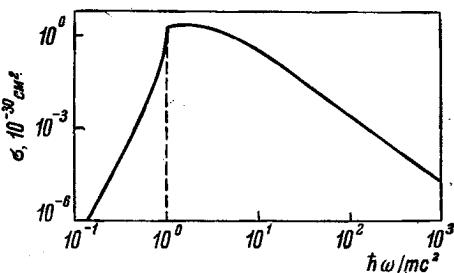


Рис. 24