§ 128. Когерентное рассеяние фотона в поле ядра

Другими (наряду с рассеянием фотона на фотоне) нелинейными эффектами, описывающимися квадратными диаграммами вида (127,1), являются распад одного фотона во внешнем поле на два фотона (и обратный процесс «слияния» двух фотонов в один) и рассеяние фотона во внешнем поле. Первому процессу отвечают диаграммы, в которых один из четырех внешних фотонных концов заменен линией внешнего поля. Второму же процессу отвечают диаграммы с двумя внешними линиями реальных и двумя — виртуальных фотонов.

К последней категории относится, в частности, когерентное (упругое) рассеяние фотона в постоянном электрическом поле неподвижного ядра. В общем случае вычисления приводят к очень громоздким формулам (содержащим кратные квадратуры)[1]. Мы ограничимся здесь лишь некоторыми оценками.

В силу требований калибровочной инвариантности амплитуда рассеяния при $\omega \to 0$ должна содержать произведения компонент 4-импульса начального (k) и конечного (k') фотонов (подобно тому как разложение амплитуды рассеяния фотона на фотоне начинается с четверных произведений компонент 4-импульсов всех фотонов). Другими словами, амплитуда рассеяния фотона малой частоты пропорциональна ω^2. Учитывая также, что эта амплитуда содержит внешнее поле (поле ядра с зарядом Ze) во втором порядке, заключаем, что сечение рассеяния

$$d\sigma \sim Z^4\alpha^4 r_e^2 \left(\frac{\omega}{m}\right)^4 do, \quad \omega \ll m. \tag{128,1}$$

Зависимость от частоты находится, разумеется, в соответствии с общими заключениями § 59.

Коэффициент в (128,1) нельзя вычислить с помощью функции Лагранжа однородного электромагнитного поля (как это можно было сделать для рассеяния света на свете). Причина заключается в том, что в данном процессе существенны расстояния от ядра $r \sim 1/m$, на которых поле ядра нельзя рассматривать как однородное.

Приведем результат точного расчета:

$$\begin{aligned} d\sigma_{++} &= d\sigma_{--} = 1{,}004 \cdot 10^{-3} (Z\alpha)^4 r_e^2 \left(\frac{\omega}{m}\right)^4 \cos^4\frac{\theta}{2}\, do, \\ d\sigma_{+-} &= d\sigma_{-+} = 3{,}81 \cdot 10^{-4} (Z\alpha)^4 r_e^2 \left(\frac{\omega}{m}\right)^4 \sin^4\frac{\theta}{2}\, do. \end{aligned} \tag{128,2}$$

[1]) См. *Costantini V., De Tollis B., Pistoni G.*//Nuovo Cimento. — 1971. — Vol. 2A. — P. 733; *De Tollis B., Lusignoli M., Pistoni G.*//Nuovo Cimento. — 1976. — Vol. 32A. — P. 227.

Индексы «+» и «—» обозначают здесь (как и в § 127) спиральности $+1$ или -1 конечного или начального фотонов; θ — угол рассеяния в системе покоя ядра (*V. Costantini, B. de Tollis, G. Pistoni*, 1971).

Для оценки сечения при высоких частотах воспользуемся оптической теоремой (см. § 71). Промежуточное состояние, фигурирующее в правой стороне соотношения унитарности, является в данном случае состоянием электрон-позитронной пары (ему отвечает рассечение диаграмм по двум внутренним электронным линиям между фотонными концами). Поэтому оптическая теорема связывает амплитуду упругого рассеяния фотона на нулевой угол с полным сечением образования пары фотоном в поле ядра $\sigma_{пар}$. Определив амплитуду $f(\omega, \theta)$ рассеяния на угол θ так, чтобы сечение рассеяния было $d\sigma = |f|^2 do$ (ср. (71,5)), будем иметь

$$\operatorname{Im} f(\omega,\ 0) = \frac{\omega}{4\pi}\sigma_{пар}.$$

Сечение $\sigma_{пар}$ отлично от нуля, разумеется, лишь при $\omega > 2m$. В ультрарелятивистском случае, взяв $\sigma_{пар}$ из (94,6), получим

$$f''(\omega) \equiv \operatorname{Im} f(\omega,\ 0) = \frac{7}{9\pi}(Z\alpha)^2 r_e \frac{\omega}{m}\left[\ln\frac{2\omega}{m} - \frac{109}{42}\right],\quad \omega \gg m. \qquad (128,3)$$

Вещественная часть амплитуды рассеяния определяется по мнимой части дисперсионным соотношением. Это соотношение должно быть написано «с одним вычитанием», т. е. его надо писать для функции f/t (где $t = \omega^2$), поскольку при $\omega \to 0$ амплитуда $f \propto \omega^2$ (ср. с соотношением «с двумя вычитаниями» (111,13)). Выделяя вещественную часть дисперсионного интеграла (для чего достаточно понимать интеграл в смысле главного значения) и перейдя от интегрирования по $t' = \omega'^2$ к интегрированию по ω', имеем

$$f'(\omega) \equiv \operatorname{Re} f(\omega,\ 0) = \frac{2\omega^2}{\pi} \mathrm{P}\int_{2m}^{\infty} \frac{f''(\omega')\,d\omega'}{\omega'(\omega'^2 - \omega^2)}. \qquad (128,4)$$

При $\omega \gg m$ в интеграле существенны значения $\omega' \sim \omega \gg m$, так что для $f''(\omega')$ можно использовать выражение (128,3); при этом нижний предел интеграла можно заменить нулем. Главное значение интеграла можно представить как полусумму интегралов по путям, проходящим по верхнему и нижнему берегам правой вещественной оси в плоскости комплексной переменной ω'; в свою очередь, эти пути можно затем повернуть в плоскости ω' до совпадения соответственно с верхней и нижней мнимыми полуосями. В результате $f'(\omega)$ представится в виде

$$f'(\omega) = -\frac{\omega^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{f''(i\xi)+f''(-i\xi)}{\xi(\xi^2+\omega^2)}\,d\xi = \frac{7}{9\pi}(Z\alpha)^2\frac{r_e}{m}\omega^2\int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2+\omega^2}$$

и окончательно

$$\operatorname{Re} f(\omega,\,0) = \frac{7}{18}(Z\alpha)^2 r_e \frac{\omega}{m}. \qquad (128,5)$$

Обратим внимание на то, что вещественная часть амплитуды, в отличие от мнимой части, не содержит большого логарифма.

Сумма квадратов выражений (128,3) и (128,5) дает сечение рассеяния на нулевой угол:

$$d\sigma\Big|_{\theta=0} = \frac{49}{81\pi^2}(Z\alpha)^4 r_e^2\left(\frac{\omega}{m}\right)^2\left\{\ln^2\frac{0,15\omega}{m}+\frac{\pi^2}{4}\right\}do \qquad (128,6)$$

(*F. Rohrlich, R. L. Gluckstern*, 1952).

Полученный для рассеяния строго вперед результат (128,6) пригоден и в некоторой области малых углов. Можно показать, что условие его применимости $\theta \ll (m/\omega)^2$. Эта область, однако, вносит лишь малый вклад в полное сечение рассеяния. Основной же вклад в полное сечение дает область углов $\theta \lesssim m/\omega$; это легко понять на основании общего (не на нулевой угол) соотношения унитарности, связывающего друг с другом амплитуды рассеяния фотона и образования пар фотоном. В этой области, однако, логарифмический член отсутствует, так что полное сечение рассеяния

$$\sigma \sim (Z\alpha)^4 r_e^2\left(\frac{\omega}{m}\right)^2\theta^2 \sim (Z\alpha)^4 r_e^2 \qquad (128,7)$$

(*H. A. Bethe, F. Rohrlich*, 1952). Таким образом, при больших ω сечение когерентного рассеяния стремится к постоянному пределу.

§ 129. Радиационные поправки к уравнениям электромагнитного поля

При квантовании электрон-позитронного поля (см. § 25) мы видели, что в выражении для энергии вакуума появляется бесконечная постоянная, которую можно записать в виде[1])

$$\mathscr{E}_0 = -\sum_{p\sigma}\varepsilon_{p\sigma}^{(-)}, \qquad (129,1)$$

где $-\varepsilon_{p\sigma}^{(-)}$ — отрицательные частоты решений уравнения Дирака. Сама по себе эта постоянная не имеет физического смыс-

[1]) Пишем здесь $\mathscr{E}$ вместо E во избежание путаницы с напряженностью электрического поля.