полуосями. В результате $f'(\omega)$ представится в виде

$$f'(\omega) = -\frac{\omega^2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{f''(i\xi)+f''(-i\xi)}{\xi(\xi^2+\omega^2)}\,d\xi = \frac{7}{9\pi}(Z\alpha)^2\frac{r_e}{m}\omega^2\int\limits_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2+\omega^2}$$

и окончательно

$$\operatorname{Re} f(\omega,\ 0) = \frac{7}{18}(Z\alpha)^2 r_e\frac{\omega}{m}. \qquad (128,5)$$

Обратим внимание на то, что вещественная часть амплитуды, в отличие от мнимой части, не содержит большого логарифма.

Сумма квадратов выражений (128,3) и (128,5) дает сечение рассеяния на нулевой угол:

$$d\sigma\Big|_{\theta=0} = \frac{49}{81\pi^2}(Z\alpha)^4 r_e^2\left(\frac{\omega}{m}\right)^2\left\{\ln^2\frac{0{,}15\omega}{m}+\frac{\pi^2}{4}\right\}do \qquad (128,6)$$

(*F. Rohrlich*, *R. L. Gluckstern*, 1952).

Полученный для рассеяния строго вперед результат (128,6) пригоден и в некоторой области малых углов. Можно показать, что условие его применимости $\theta \ll (m/\omega)^2$. Эта область, однако, вносит лишь малый вклад в полное сечение рассеяния. Основной же вклад в полное сечение дает область углов $\theta \lesssim m/\omega$; это легко понять на основании общего (не на нулевой угол) соотношения унитарности, связывающего друг с другом амплитуды рассеяния фотона и образования пар фотоном. В этой области, однако, логарифмический член отсутствует, так что полное сечение рассеяния

$$\sigma \sim (Z\alpha)^4 r_e^2\left(\frac{\omega}{m}\right)^2\theta^2 \sim (Z\alpha)^4 r_e^2 \qquad (128,7)$$

(*H. A. Bethe*, *F. Rohrlich*, 1952). Таким образом, при больших ω сечение когерентного рассеяния стремится к постоянному пределу.

§ 129. Радиационные поправки к уравнениям электромагнитного поля

При квантовании электрон-позитронного поля (см. § 25) мы видели, что в выражении для энергии вакуума появляется бесконечная постоянная, которую можно записать в виде[1])

$$\mathscr{E}_0 = -\sum_{p\sigma}\varepsilon_{p\sigma}^{(-)}, \qquad (129,1)$$

где $-\varepsilon_{p\sigma}^{(-)}$ — отрицательные частоты решений уравнения Дирака. Сама по себе эта постоянная не имеет физического смыс-

[1]) Пишем здесь $\mathscr{E}$ вместо E во избежание путаницы с напряженностью электрического поля.

ла, так как энергия вакуума равна нулю по определению. С другой стороны, при наличии электромагнитного поля уровни энергии $\varepsilon_{p\sigma}^{(-)}$ будут меняться. Эти изменения конечны и имеют определенный физический смысл. Они описывают зависимость свойств пространства от поля и меняют уравнения электромагнитного поля в вакууме.

Изменение уравнений поля выражается в изменении его функции Лагранжа. Плотность L функции Лагранжа является релятивистским инвариантом и потому может быть функцией лишь от инвариантов $\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2$ и $\mathbf{EH}$. Обычное выражение

$$L_0=\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2) \tag{129,2}$$

есть первый член разложения общего выражения по степеням инвариантов.

Мы найдем функцию Лагранжа в случае, когда поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ настолько медленно меняются в пространстве и времени, что их можно считать однородными и постоянными; тогда L не содержит производных от полей. На формулировке необходимых для этого условий мы остановимся в конце параграфа.

Однако для того чтобы поставленная задача имела смысл, необходимо еще предполагать электрическое поле достаточно слабым. Дело в том, что однородное электрическое поле может рождать из вакуума пары. Рассмотрение поля самого по себе как замкнутой системы допустимо, лишь если вероятность образования пар достаточно мала. Именно, должно быть

$$|\mathbf{E}|\ll\frac{m^2}{|e|}\left(=\frac{m^2c^3}{|e|\hbar}\right) \tag{129,3}$$

(изменение энергии заряда e на расстоянии $\hbar/mc$ должно быть мало по сравнению с mc^2). Мы увидим ниже (см. также задачу 2), что в таком случае вероятность образования пар экспоненциально мала.

Если наряду с электрическим полем имеется также и магнитное, то, вообще говоря, можно выбрать систему отсчета, в которой $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ параллельны. Тогда магнитное поле не влияет на движение заряда в направлении $\mathbf{E}$. Именно в этой системе (выбор которой будет подразумеваться в дальнейших вычислениях) должно выполняться условие (129,3).

Вычисление функции Лагранжа начнем с определения изменения W' энергии вакуума. Величина W' дается изменением за счет поля «нулевой энергии» (129,1). Из этой величины, однако, надо еще вычесть средние значения потенциальной энергии электронов в «состояниях» с отрицательной энергией. Последнее вычитание означает просто, что полный заряд вакуума по определению равен нулю.

Нулевая энергия при наличии поля:

$$\mathscr{E}_0 = -\sum_{p\sigma} \varepsilon_{p\sigma}^{(-)} = \sum_{p\sigma} \int \psi_{p\sigma}^{(-)*} i \frac{\partial}{\partial t} \psi_{p\sigma}^{(-)} d^3x, \tag{129,4}$$

где $\psi_{p\sigma}^{(-)}$ — отрицательно-частотные решения уравнения Дирака в данном поле. Будем предполагать, что интегрирование ведется по единичному объему, а волновые функции нормированы на 1 в этом объеме; тогда $\mathscr{E}_0$ есть энергия единицы объема. Согласно сказанному выше из $\mathscr{E}_0$ надо вычесть величину

$$U_0 = \sum_{p\sigma} \int \psi_{p\sigma}^{(-)*} e\varphi \psi_{p\sigma}^{(-)} d^3x,$$

где $\varphi = -\mathbf{E}\mathbf{r}$ — потенциал однородного поля. Но согласно теореме о дифференцировании оператора по параметру (см. III (11,16))

$$U_0 = \mathbf{E} \sum_{p\sigma} \int \psi_{p\sigma}^{(-)*} \frac{\partial \hat{H}}{\partial \mathbf{E}} \psi_{p\sigma}^{(-)} d^3x = -\mathbf{E} \sum_{p\sigma} \frac{\partial \varepsilon_{p\sigma}^{(-)}}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{E} \frac{\partial \mathscr{E}_0}{\partial \mathbf{E}}.$$

Таким образом, окончательно полное изменение плотности энергии вакуума

$$W' = \left(\mathscr{E}_0 - \mathbf{E} \frac{\partial \mathscr{E}_0}{\partial \mathbf{E}}\right) - \left(\mathscr{E}_0 - \mathbf{E} \frac{\partial \mathscr{E}_0}{\partial \mathbf{E}}\right)_{\mathbf{E}=\mathbf{H}=0}. \tag{129,5}$$

Свяжем W' с изменением плотности лагранжиана L' ($L = L_0 + L'$). Для этого воспользуемся общей формулой

$$W = \sum \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L,$$

где q — «обобщенные координаты» поля (см. II, § 32). Для электромагнитного поля роль величин q играют потенциалы $\mathbf{A}$ и φ. Поскольку

$$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} - \nabla\varphi, \qquad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \tag{129,6}$$

то из числа «скоростей» $\dot{q}$ в L входит лишь $\dot{\mathbf{A}}$, а дифференцирование по $\dot{\mathbf{A}}$ эквивалентно дифференцированию по $\mathbf{E}$. Поэтому

$$W' = \mathbf{E} \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{E}} - L'. \tag{129,7}$$

Сравнив (129,5) и (129,7), найдем

$$L' = -\left[\mathscr{E}_0 - \mathscr{E}_0|_{\mathbf{E}=\mathbf{H}=0}\right]. \tag{129,8}$$

Таким образом, вычисление L' сводится к вычислению суммы (129,1).

Рассмотрим сначала случай, когда имеется лишь магнитное поле. «Отрицательные» уровни энергии электрона (заряд $e =$

$=-|e|$) в постоянном однородном поле $H_z = H$

$$-\varepsilon_p^{(-)} = -\sqrt{m^2+|e|H(2n-1+\sigma)+p_z^2}, \qquad (129,9)$$
$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ \sigma=\pm 1$$

(см. задачу к § 32). Для вычисления суммы учтем, что число состояний в интервале dp_z есть

$$\frac{|e|H}{2\pi}\,\frac{dp_z}{2\pi}$$

(см. III, § 112); первый множитель есть число состояний с различными значениями p_x, от которых энергия не зависит. Кроме того, все уровни, за исключением лишь уровня с $n=0$, $\sigma=-1$, двукратно вырождены: совпадают уровни с n, $\sigma=+1$ и $n+1$, $\sigma=-1$. Поэтому

$$-\mathscr{E}_0 = \frac{|e|H}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\sqrt{m^2+p_z^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{m^2+2|e|Hn+p_z^2}\right\}dp_z. \qquad (129,10)$$

Расходимость интегралов в (129,10) устраняется при вычислении L' (129,8) вычитанием значения суммы при $H=0$. Для проведения этой «перенормировки» удобно вычислить сначала сходящееся выражение

$$\Phi = -\frac{\partial^2\mathscr{E}_0}{(\partial m^2)^2} =$$
$$= -\frac{|e|H}{2(2\pi)^2}\int\limits_0^{\infty}\left\{(m^2+p_z^2)^{-3/2}+2\sum_{n=1}^{\infty}(m^2+2|e|Hn+p_z^2)^{-3/2}\right\}dp_z =$$
$$= -\frac{|e|H}{8\pi^2}\left\{\frac{1}{m^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^2+2|e|Hn}\right\}.$$

Суммирование в фигурных скобках можно свести к суммированию геометрической прогрессии следующим способом:

$$\Phi = -\frac{|e|H}{8\pi^2}\int\limits_0^{\infty}e^{-m^2\eta}\left[2\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2|e|Hn\eta}-1\right]d\eta =$$
$$= -\frac{|e|H}{8\pi^2}\int\limits_0^{\infty}e^{-m^2\eta}\left[\frac{2}{1-e^{-2|e|H\eta}}-1\right]d\eta =$$
$$= -\frac{|e|H}{8\pi^2}\int\limits_0^{\infty}e^{-m^2\eta}\,\mathrm{cth}(|e|H\eta)\,d\eta. \qquad (129,11)$$

Для нахождения L' надо теперь дважды проинтегрировать Φ по m^2, после чего вычесть значение получающейся величины при $H=0$. Находим

$$L' = -\frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{e^{-m^2\eta}}{\eta^3}\{\eta|e|H\operatorname{cth}(\eta|e|H)-1\}\,d\eta + c_1 + c_2 m^2, \tag{129,12}$$

где c_1 и c_2 зависят от H, но не зависят от m^2.

Из соображений размерности и четности по $\mathbf{H}$ очевидно, что L' как функция от H и m должна иметь вид

$$L' = m^4 f\left(\frac{H^2}{m^4}\right).$$

Поэтому членов, нечетных по m^2, в L' вообще не может быть, так что $c_2=0$. Коэффициент же c_1 определяется из условия, чтобы разложение L' по степеням H^2 начиналось с члена $\sim H^4$. Действительно, член $\sim H^2$ в L' означал бы просто изменение коэффициента в исходном лагранжиане $L_0=-H^2/8\pi$. Но это было бы, по существу, изменением определения напряженности поля, а тем самым и заряда. Поэтому устранение членов $\sim H^2$ означает перенормировку заряда. Легко проверить, что для этого надо положить

$$c_1 = \frac{H^2e^2}{3\cdot 8\pi^2}\int_0^\infty \frac{e^{-\eta}}{\eta}\,d\eta.$$

Наконец, произведя еще в (129,12) замену переменной $m^2\eta\to\eta$, получим окончательно

$$L'(H;\,E=0) = \frac{m^4}{8\pi^2}\int_0^\infty \left\{-\eta b\operatorname{cth} b\eta + 1 + \frac{b^2\eta^2}{3}\right\}e^{-\eta}\frac{d\eta}{\eta^3}, \tag{129,13}$$

где $b=|e|H/m^2$.

Вернемся к общему случаю, когда наряду с магнитным имеется также и параллельное ему электрическое поле $\mathbf{E}$, удовлетворяющее условию (129,3).

Для вычисления L' в этом случае нет, однако, необходимости решать заново задачу об определении уровней энергии $\varepsilon_p^{(-)}$ электрона в поле. Достаточно заметить, что если искать волновую функцию — решение уравнения второго порядка (32,7) — в виде произведения

$$\psi = \psi_E(z)\,e^{ip_x x}\chi_{n\sigma}(y),$$

где $\chi_{n\sigma}(y)$ — волновая функция в магнитном поле при $\mathbf{E}=0$ и $p_z=0$, то масса m и поле H войдут в уравнение для $\psi_E(z)$ лишь в комбинации

$$m^2+|e|H(2n+1+\sigma).$$

Если теперь учесть, что суммирование по p_x (от которого уровни энергии не зависят) по-прежнему дает множитель $|e|H/2\pi$, то из соображений размерности величину

$$\Phi(H,\ E)\equiv\frac{\partial^2 L'}{(\partial m^2)^2}$$

можно записать в виде

$$\Phi(H,\ E)=-\frac{|e|H}{8\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\sigma=\pm 1}\frac{F\left(\dfrac{m^2+|e|H(2n+1+\sigma)}{|e|H}\right)}{m^2+|e|H(2n+1+\sigma)}=$$

$$=-\frac{b}{8\pi^2}\left\{F\left(\frac{1}{a}\right)+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F\left(\dfrac{1+2bn}{a}\right)}{1+2bn}\right\},\quad a=\frac{|e|E}{m^2}\qquad(129{,}14)$$

(каждый член этой суммы есть производная $-d^2\varepsilon_p^{(-)}/(dm^2)^2$, просуммированная по всем квантовым числам, кроме n). Здесь F — неизвестная пока функция, которую мы найдем из соображений релятивистской инвариантности.

Действительно, Φ должно быть функцией скаляров H^2-E^2 и $(EH)^2=(\mathbf{EH})^2$:

$$\Phi(H,\ E)=f(H^2-E^2,\ (EH)^2).$$

Поэтому

$$\Phi(0,\ E)=f(-E^2,\ 0)=\Phi(iE,\ 0).$$

Но функция $\Phi(iE,0)$ получается из (129,11) заменой $H\to iE$; после переобозначения переменной интегрирования найдем

$$\Phi(iE,\ 0)=\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{\infty}e^{-\eta/a}\operatorname{ctg}\eta\,d\eta.\qquad(129{,}15)$$

Сравнив это выражение с пределом $\Phi(H\to 0,E)$, вычисленным из (129,14), мы сможем найти функцию F.

Переход к пределу $H\to 0$ в (129,14) производится путем замены суммирования по n интегрированием по $dn=dx/2b$:

$$\Phi(0,\ E)=-\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{\infty}F\left(\frac{1+x}{a}\right)\frac{dx}{1+x}=-\frac{1}{8\pi^2}\int_{1/a}^{\infty}\frac{F(y)}{y}\,dy.\ (129{,}16)$$

Приравняв выражения (129,15) и (129,16) и продифференцировав это равенство по $1/a \equiv z$, получим

$$\frac{F(z)}{z} = -\int_0^\infty e^{-\eta z}\eta \operatorname{ctg}\eta \, d\eta.$$

После этого суммирование в (129,14) снова сводится к суммированию геометрической прогрессии, и дальнейшие вычисления аналогичны произведенным выше: выражаем Φ через m^2, E и H, интегрируем дважды по m^2, вычитаем значение при $E = H = 0$ и определяем постоянные интегрирования, как при выводе (129,13). Окончательный результат[1]):

$$L' = \frac{m^4}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{e^{-\eta}}{\eta^3}\left\{-(\eta a \operatorname{ctg}\eta a)(\eta b \operatorname{cth}\eta b) + 1 - \frac{\eta^2}{3}(a^2 - b^2)\right\} d\eta,$$

$$a = \frac{|e|E}{m^2}\left(= \frac{|e|\hbar E}{m^2c^3}\right), \quad b = \frac{|e|H}{m^2}\left(= \frac{|e|\hbar H}{m^2c^3}\right). \tag{129,17}$$

Параметры a и b можно записать в инвариантном виде

$$a = -\frac{i|e|}{\sqrt{2}\, m^2}\{(\mathscr{F} + i\mathscr{G})^{1/2} - (\mathscr{F} - i\mathscr{G})^{1/2}\},$$
$$b = \frac{|e|}{\sqrt{2}\, m^2}\{(\mathscr{F} + i\mathscr{G})^{1/2} + (\mathscr{F} - i\mathscr{G})^{1/2}\}, \tag{129,18}$$

где $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ обозначают инварианты

$$\mathscr{F} = \frac{1}{2}(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2), \quad \mathscr{G} = \mathbf{EH}, \quad \mathscr{F} \pm i\mathscr{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} \pm i\mathbf{E})^2. \tag{129,19}$$

После того как формула (129,17) выражена через инварианты $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$, она тем самым становится применимой в произвольной системе отсчета (а не только в той, где $\mathbf{E} \| \mathbf{H}$).

Сразу же отметим несколько условный характер записи формулы (129,17). Она пригодна лишь при соблюдении условия малости электрического поля: $a \ll 1$ (129,3) (не учтенного в (129,17) в явном виде). Это проявляется в том, что подынтегральное выражение в (129,17) имеет полюсы при $\eta = n\pi/a$ ($n = 1, 2, \ldots$), так что в написанном виде интеграл, строго говоря, не имеет смысла. Поэтому (129,17) может, по существу, служить лишь для получения членов асимптотического (см.

[1]) Этот результат был впервые получен *Гейзенбергом* и *Эйлером* (*W. Heisenberg, H. Euler*, 1935). В изложенных вычислениях использованы также идеи вывода, предложенного *Вайскопфом* (*V. Weisskopf*, 1936).

ниже) ряда по степеням a путем формального разложения $\operatorname{ctg} a$.

Математически интегралу (129,17) можно придать смысл, обходя полюсы в плоскости комплексного η. При этом у L', а тем самым и у плотности энергии W' появляется мнимая часть. Комплексность энергии, как обычно, означает квазистационарность состояния [1]). В данном случае стационарность нарушается рождением пар, а величина $-2\operatorname{Im} W'$ есть вероятность w рождения пары в единице объема в единицу времени; так как малые добавки к W и L отличаются только знаком, вероятность w, выраженная через E и H, равна просто

$$w = 2\operatorname{Im} L'. \qquad (129,20)$$

Очевидно, что она пропорциональна $e^{-\pi/a}$ (см. ниже (129,22)). Именно вследствие экспоненциальной малости $\operatorname{Im} W'$ при $a \ll 1$ имеет смысл асимптотический ряд по степеням a с сохранением в нем любого конечного числа членов.

Рассмотрим предельные случаи формулы (129,17). В слабых полях ($a \ll 1$, $b \ll 1$) первые члены разложения:

$$L' = \frac{m^4}{8\pi^2}\frac{(a^2-b^2)^2+7(ab)^2}{45} = \frac{e^4}{45\cdot 8\pi^2 m^4}(4\mathcal{F}^2+7\mathcal{G}^2). \qquad (129,21)$$

В частности, при $b = 0$ относительная поправка

$$\frac{L'}{L_0} = \alpha\frac{a^2}{45\pi}.$$

Мнимая часть L' при $a \ll 1$ получается из интеграла (129,17) взятием полувычета в ближайшем к нулю полюсе котангенса, т. е. при $\eta a = \pi - i0$. Согласно (129,20) она дает вероятность рождения пары слабым электрическим полем:

$$w = \frac{m^4}{4\pi^3}\cdot a^2 e^{-\pi/a},$$

или, в обычных единицах:

$$w = \frac{1}{4\pi^3}\left(\frac{eE\hbar}{m^2c^3}\right)^2\frac{mc^2}{\hbar}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3\exp\left(-\frac{\pi m^2c^3}{|e|\hbar E}\right). \qquad (129,22)$$

В сильном магнитном поле ($a = 0$, $b \gg 1$) исходим из формулы (129,13), записанной (после замены $b\eta \to \eta$) в виде

$$L' = \frac{m^4 b^2}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{e^{-\eta/b}}{\eta}\left[\frac{1}{3} - \frac{\eta \operatorname{cth}\eta - 1}{\eta^2}\right]d\eta.$$

[1]) Направление обхода в интеграле должно быть выбрано так, чтобы было $\operatorname{Im} W' < 0$. Этому требованию отвечает обычное правило замены массы $m^2 \to m^2 - i0$ (в данном случае $a \to a + i0$).

При $b \gg 1$ в этом интеграле существенна область $1 \ll \eta \ll b$. В ней $e^{-\eta/b} \approx 1$, и можно пренебречь вторым членом в скобках, а интеграл обрезать (с логарифмической точностью) на пределах $\eta \approx 1$ и $\eta \approx b$. Тогда

$$L' = \frac{m^4 b^2}{24\pi^2} \ln b \tag{129,23}$$

(более точное вычисление заменяет $\ln b$ на $\ln b - 2{,}29$). В этом случае

$$\frac{L'}{L_0} \approx \frac{\alpha}{3\pi} \ln b.$$

Отсюда видно, что радиационные поправки к уравнениям поля могли бы достигнуть относительного порядка единицы лишь в экспоненциально больших полях:

$$H \sim \frac{m^2}{|e|} e^{3\pi/\alpha}. \tag{129,24}$$

Тем не менее вычисленные поправки имеют смысл: они нарушают линейность уравнений Максвелла и тем самым приводят к наблюдаемым, в принципе, эффектам (например, к рассеянию света на свете или во внешнем поле).

Связь напряженностей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ с потенциалами $\mathbf{A}$ и φ остается, по определению, прежней — (129,6). Поэтому не меняется также и первая пара уравнений Максвелла:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{129,25}$$

Вторая же пара уравнений получается путем варьирования действия

$$S = \int (L_0 + L')\, d^4x$$

по $\mathbf{A}$ и φ. Они могут быть записаны в виде

$$\operatorname{rot}(\mathbf{H} - 4\pi\mathbf{M}) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}), \tag{129,26}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 0, \tag{129,27}$$

где введены обозначения:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{E}}, \quad \mathbf{M} = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{H}}. \tag{129,28}$$

По форме уравнения (129,25—27) совпадают с макроскопическими уравнениями Максвелла для поля в материальной среде [1]). Отсюда видно, что величины **P** и **M** имеют смысл векторов электрической и магнитной поляризации вакуума.

Отметим, что **P** и **M** обращаются в нуль для поля плоской волны, в котором, как известно, оба инварианта $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$ и $\mathbf{EH}$ равны нулю. Другими словами, для плоской волны нелинейные поправки в вакууме отсутствуют.

Остановимся, наконец, на условиях применимости полученных формул. Для того чтобы поля можно было считать постоянными, их относительные изменения на расстояниях или промежутках времени $\sim 1/m$ должны быть малы; этим обеспечивается малость связанных с производными поправок к L_0 по сравнению с самим L_0. Так, если поле зависит только от времени, это приводит к естественному условию

$$\omega \ll m. \tag{129,29}$$

Для случая слабого поля, однако, имеется и более жесткое условие. Оно возникает из требования, чтобы член четвертого порядка (129,21) был велик по сравнению с квадратичной по производным поправкой к L_0; в противном случае этот член потерял бы смысл. Так, для электрического поля, зависящего только от времени, это приводит к условию

$$\omega \ll m \frac{|e| E}{m^2}, \tag{129,30}$$

более жесткому, чем (129,29).

Условие (129,30) не возникает, однако, при решении задачи о рассеянии фотона на фотоне, рассмотренной в последнем разделе § 127. Там мы с самого начала интересуемся только четырехфотонным процессом, описываемым членами четвертого порядка в функции Лагранжа, и вопрос об относительном значении других членов в L' не имеет отношения к делу. Поэтому достаточно было потребовать выполнения лишь условия (129,29).

Задачи

1. Определить поправку к полю малого неподвижного заряда e_1, связанную с нелинейностью уравнений Максвелла.

Решение. При $\mathbf{H} = 0$ имеем из (129,21):

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\alpha^2}{90\pi^2 m^4} \mathbf{E} E^2. \tag{1}$$

В центрально-симметричном случае из (129,27) находим

$$(E + 4\pi P) r^2 = \mathrm{const} = e_1 \tag{2}$$

[1]) См. VIII, § 75. При сравнении надо помнить, что в макроскопической электродинамике среднее значение микроскопической напряженности магнитного поля обозначается **B**, а не **H**, как здесь.

(постоянная определена из условия, что при $r \to \infty$ поле совпадает с кулоновым полем заряда e_1). Приближенно решая (2), получаем

$$E = \frac{e_1}{r^2}\left(1 - \frac{2\alpha^2 e_1^2}{45\pi m^4 r^4}\right),$$

или

$$\Phi = \frac{e_1}{r}\left(1 - \frac{2\alpha^2 e_1^2}{225\pi m^4 r^4}\right). \tag{3}$$

Нелинейную по e_1 поправку в (3) следует отличать от линейной поправки в (114,6), связанной в конечном счете с неоднородностью кулонова поля. Поправка (3) более высокого порядка по α, но медленнее убывает с расстоянием и быстрее растет с увеличением e_1.

2. Непосредственно оценить вероятность рождения пары в слабом однородном постоянном электрическом поле в квазиклассическом приближении с экспоненциальной точностью (*F. Sauter*, 1931).

Решение. Движение в слабом поле **E** (медленно меняющийся потенциал $\varphi = -\mathbf{Er} = -Ez$) квазиклассично. Поскольку в амплитуду реакции волновая функция конечного позитрона входит в виде начальной «отрицательно-частотной» функции, рождение пары можно рассматривать как переход электрона из «отрицательно-частотного» в «положительно-частотное» состояние. В первом из них при наличии поля квазиклассический импульс определяется равенством

$$\varepsilon = -\sqrt{p^2(z) + m^2} + |e|Ez, \tag{1}$$

а во втором

$$\varepsilon = +\sqrt{p^2(z) + m^2} + |e|Ez. \tag{2}$$

Переход из первого состояния во второе есть переход через потенциальный барьер (область мнимого $p(z)$), разделяющий области зависимостей (1) и (2) с вещественными $p(z)$ при заданном ε. Границы этого барьера z_1 и z_2 лежат при $p(z) = 0$, т. е.

$$\varepsilon = -m + |e|Ez_1, \qquad \varepsilon = +m + |e|Ez_2.$$

Вероятность перехода через квазиклассический барьер

$$w \propto \exp\left(-2\int_{z_2}^{z_1} |p(z)|\,dz\right) = \exp\left(-4\frac{m^2}{eE}\int_0^1 \sqrt{1-\xi^2}\,d\xi\right),$$

откуда

$$w \propto \exp\left(-\frac{\pi m^2}{|e|E}\right)$$

в согласии с (129,22).

§ 130. Расщепление фотона в магнитном поле

Нелинейные поправки в уравнениях электромагнитного поля приводят к ряду специфических эффектов при распространении фотонов во внешних полях.

С целью придания этим уравнениям более обычного вида (ср. примеч. на с. 649), будем обозначать в этом параграфе