(постоянная определена из условия, что при $r \to \infty$ поле совпадает с кулоновым полем заряда e_1). Приближенно решая (2), получаем

$$E = \frac{e_1}{r^2}\left(1 - \frac{2\alpha^2 e_1^2}{45\pi m^4 r^4}\right),$$

или

$$\Phi = \frac{e_1}{r}\left(1 - \frac{2\alpha^2 e_1^2}{225\pi m^4 r^4}\right). \qquad (3)$$

Нелинейную по e_1 поправку в (3) следует отличать от линейной поправки в (114,6), связанной в конечном счете с неоднородностью кулонова поля. Поправка (3) более высокого порядка по α, но медленнее убывает с расстоянием и быстрее растет с увеличением e_1.

2. Непосредственно оценить вероятность рождения пары в слабом однородном постоянном электрическом поле в квазиклассическом приближении с экспоненциальной точностью (*F. Sauter*, 1931).

Решение. Движение в слабом поле $\mathbf{E}$ (медленно меняющийся потенциал $\varphi = -\mathbf{Er} = -Ez$) квазиклассично. Поскольку в амплитуду реакции волновая функция конечного позитрона входит в виде начальной «отрицательно-частотной» функции, рождение пары можно рассматривать как переход электрона из «отрицательно-частотного» в «положительно-частотное» состояние. В первом из них при наличии поля квазиклассический импульс определяется равенством

$$\varepsilon = -\sqrt{p^2(z) + m^2} + |e|Ez, \qquad (1)$$

а во втором

$$\varepsilon = +\sqrt{p^2(z) + m^2} + |e|Ez. \qquad (2)$$

Переход из первого состояния во второе есть переход через потенциальный барьер (область мнимого $p(z)$), разделяющий области зависимостей (1) и (2) с вещественными $p(z)$ при заданном ε. Границы этого барьера z_1 и z_2 лежат при $p(z) = 0$, т. е.

$$\varepsilon = -m + |e|Ez_1, \qquad \varepsilon = +m + |e|Ez_2.$$

Вероятность перехода через квазиклассический барьер

$$w \propto \exp\left(-2\int_{z_2}^{z_1} |p(z)|\, dz\right) = \exp\left(-4\frac{m^2}{eE}\int_0^1 \sqrt{1-\xi^2}\, d\xi\right),$$

откуда

$$w \propto \exp\left(-\frac{\pi m^2}{|e|E}\right)$$

в согласии с (129,22).

§ 130. Расщепление фотона в магнитном поле

Нелинейные поправки в уравнениях электромагнитного поля приводят к ряду специфических эффектов при распространении фотонов во внешних полях.

С целью придания этим уравнениям более обычного вида (ср. примеч. на с. 649), будем обозначать в этом параграфе напряженности электрического и магнитного полей **E** и **B**; буквами же **D** и **H** обозначим величины

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}, \quad \mathbf{P} = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{E}}, \quad \mathbf{M} = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{B}}.$$

Тогда уравнения (129,25—27) примут вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad & \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \quad & \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{130,1}$$

Рассмотрим распространение фотона в постоянном однородном магнитном поле $\mathbf{B}_0$. Обозначив величины, относящиеся к слабому полю электромагнитной волны, буквами со штрихом, будем иметь для них уравнения

$$\begin{aligned} [\mathbf{kH}'] = -\omega\mathbf{D}', \quad & [\mathbf{kE}'] = \omega\mathbf{B}', \\ \mathbf{kB}' = 0, \quad & \mathbf{kD}' = 0, \end{aligned} \tag{130,2}$$

причем

$$D'_i = \varepsilon_{ik}E'_k, \quad B'_i = \mu_{ik}H'_k; \tag{130,3}$$

тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости вакуума являются функциями внешнего поля $\mathbf{B}_0$. Предполагая это поле слабым в смысле $|e|B_0/m^2 \ll 1$, найдем из лагранжевой функции (129,21):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ik} &= \delta_{ik} + \frac{2e^4}{45m^4} B_0^2 \left(-\delta_{ik} + \frac{7}{2} b_i b_k\right), \\ \mu_{ik} &= \delta_{ik} + \frac{2e^4}{45m^4} B_0^2 (\delta_{ik} + 2b_i b_k), \end{aligned} \tag{130,4}$$

где $\mathbf{b} = \mathbf{B}_0/B_0$.

Напомним, что частота фотона предполагается малой: $\omega \ll m$ (условие (129,29)). Отметим, однако, что характер структуры тензоров ε_{ik} и μ_{ik} не связан с этим предположением, а является следствием уже инвариантности квантовой электродинамики относительно пространственной инверсии и зарядового сопряжения. Так, первая запрещает появление в $\mathbf{D}'$ членов вида $\mathrm{const}\cdot\mathbf{B}'$ и $\mathrm{const}\cdot\mathbf{B}_0(\mathbf{B}_0\mathbf{B}')$ (инверсия меняет знак **E** и **D** при неизменных **H** и **B**), а вторая запрещает появление в ε_{ik} и μ_{ik} антисимметричных и нечетных по $\mathbf{B}_0$ членов вида $e_{ikl}B_{0l}$ (зарядовое сопряжение меняет одновременно знак всех полей).

Ввиду наличия в рассматриваемой задаче избранной плоскости — плоскости, проходящей через **k** и **b**, — в качестве двух независимых поляризаций фотона естественно выбрать линейные поляризации в этой плоскости и перпендикулярно ей. Будем отмечать индексами $\perp$ и $\|$ поляризации, при которых вектор $\mathbf{B}'$ соответственно перпендикулярен плоскости **k**, **b** или лежит в ней.

В случае перпендикулярной поляризации вместе с вектором $\mathbf{B}'$ перпендикулярен плоскости $\mathbf{k}$, $\mathbf{b}$ также и вектор $\mathbf{H}'$:

$$\mathbf{B}' = \left(1 + \frac{2e^4}{45m^4} B_0^2\right) \mathbf{H}'.$$

Векторы же $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{D}'$ лежат в плоскости $\mathbf{k}$, $\mathbf{b}$. В этом случае из уравнений (130,2) получаем закон дисперсии фотонов в виде $k = n_\perp \omega$ с «показателем преломления» (обычные единицы)

$$n_\perp = 1 + \frac{7e^4\hbar}{90m^4c^7} B_0^2 \sin^2\theta, \tag{130,5}$$

где θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}_0$ [1]).

Во втором случае векторы $\mathbf{B}'$ и $\mathbf{H}'$ лежат в плоскости $\mathbf{k}$, $\mathbf{b}$, а векторы $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{D}'$ перпендикулярны ей. Для показателя преломления получается

$$n_\parallel = 1 + \frac{2e^4\hbar}{45m^4c^7} B_0^2 \sin^2\theta. \tag{130,6}$$

Отметим, что $n_\perp \geqslant n_\parallel$. Знак равенства достигается при $\theta = 0$, когда $n_\perp = n_\parallel = 1$.

Наиболее интересным проявлением нелинейности уравнений Максвелла с учетом радиационных поправок является расщепление фотона на два фотона во внешнем магнитном поле (*S. L. Adler, J. N. Bahcall, C. G. Callan, M. N. Rosenbluth*, 1970).

В постоянном и однородном поле этот процесс идет с сохранением энергии и импульса [2]). При распаде фотона $\mathbf{k}$ на фотоны $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ имеем

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2), \quad \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}. \tag{130,7}$$

Для фотонов в вакууме в отсутствие внешних полей $\omega = k$ и равенства (130,7) могут выполняться лишь для трех фотонов, движущихся в одном направлении. Но и в таком случае распад строго запрещен инвариантностью относительно зарядового сопряжения — в силу теоремы Фарри (см. § 79) сумма диаграмм с тремя фотонными внешними концами обращается в нуль.

Наличие внешнего поля делает распад фотона возможным (он изображается диаграммами с тремя фотонными концами и одной или более линиями внешнего поля). Но эта возможность оказывается связанной с характером поляризации фотонов. Эту

---

[1]) Выразив $\mathbf{B}'$ через $\mathbf{H}'$ во втором из уравнений (130,2), подставим из него $\mathbf{H}'$ в первое уравнение, после чего спроецируем последнее на направление $\mathbf{b}$. Произведение $\mathbf{kE}'$ выражается через $\mathbf{bE}'$ из уравнения $\mathbf{kD}' = 0$.

[2]) Сохранение импульса связано с пространственной однородностью поля, но имеет место, конечно, лишь для процессов с незаряженными частицами. В лагранжеву функцию заряженных частиц входят не только напряженности, но и потенциалы поля, зависящие от координат и в однородном поле.

связь можно установить уже из анализа законов сохранения (130,7) с учетом изменения закона дисперсии фотона в магнитном поле.

Запишем закон дисперсии в виде

$$\omega = k + \beta(\mathbf{k}), \tag{130,8}$$

где $\beta(\mathbf{k})$ — малая (в слабом поле) добавка. Ее наличие делает, в принципе, возможным выполнение равенств (130,7) для импульсов $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, лежащих в некотором узком конусе вблизи направления $\mathbf{k}$. Ввиду близости направлений всех трех векторов $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ можно в малых членах $\beta(\mathbf{k})$ положить их все направленными вдоль $\mathbf{k}$ и считать, что $k_1 + k_2 = k$. Тогда закон сохранения энергии запишется как

$$\beta(\varkappa k) - \beta_1(\varkappa k_1) - \beta_2(\varkappa(k - k_1)) = k_1 + |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| - k$$

($\varkappa = \mathbf{k}/k$); поскольку закон дисперсии зависит от поляризации фотона, функции β, β_1, β_2 могут быть различными. Учитывая, что

$$|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| = [(k - k_1)^2 + 2kk_1(1 - \cos\vartheta)]^{1/2} \approx k - k_1 + \frac{kk_1}{2(k - k_1)}\vartheta^2$$

(ϑ — малый угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_1$), имеем

$$\beta(\varkappa k) - \beta_1(\varkappa k_1) - \beta_2(\varkappa(k - k_1)) = \frac{kk_1\vartheta^2}{2(k - k_1)} > 0. \tag{130,9}$$

Это неравенство определяет необходимые для распада свойства закона дисперсии.

Для частот $\omega \ll m$ закон дисперсии дается формулами (130,5—6), так что $\beta(\mathbf{k}) \approx -k[n(\varkappa) - 1]$, где функция $n(\varkappa)$ зависит от направления, но не от величины вектора $\mathbf{k}$. Тогда должно быть

$$k_1 n_1(\varkappa) + (k - k_1) n_2(\varkappa) - kn(\varkappa) > 0. \tag{130,10}$$

Поскольку $n_\perp > n_\parallel$, этим условием сразу исключаются распады

$$\gamma_\perp \to \gamma_\parallel + \gamma_\parallel, \quad \gamma_\perp \to \gamma_\parallel + \gamma_\perp,$$

где символ γ означает фотон, а индексы $\perp$ и $\parallel$ отвечают двум определенным выше поляризациям [1]).

Для распадов

$$\gamma_\perp \to \gamma_\perp + \gamma_\perp, \quad \gamma_\parallel \to \gamma_\parallel + \gamma_\parallel$$

левая сторона неравенства (130,10) обращается в нуль, поскольку функции n, n_1, n_2 одинаковы. Для выяснения вопроса

[1]) Численные расчеты показывают, что неравенство $n_\perp > n_\parallel$ верно не только при $\omega \ll m$ (когда справедливы выражения (130,5—6)), но и при всех $\omega < 2m$ (порог для рождения пар фотоном).

в этом случае необходимо учесть зависимость коэффициента преломления от k, появляющуюся по мере увеличения ω. Требуемое неравенство:

$$k_1 n(\varkappa, k_1) + (k - k_1) n(\varkappa, k - k_1) - kn(\varkappa, k) > 0.$$

Уже из общих соображений можно утверждать, что $n(\varkappa, k)$ — возрастающая функция k, и потому это неравенство не может быть выполнено, так что рассматриваемые распады тоже невозможны (действительно, заменив $n(k - k_1)$ и $n(k_1)$ на $n(k)$, мы заведомо увеличим всю сумму, между тем как после замены она станет лишь равной нулю). Сделанное утверждение относится к любым прозрачным средам и является следствием формулы Крамерса — Кронига для показателя преломления (ср. VIII, § 84). В данном случае внешнее поле представляет собой «прозрачную среду» для фотонов всех частот $\omega < 2m$ — вплоть до порога рождения пар, т. е. появления поглощения фотонов.

Таким образом, единственными разрешенными процессами распада оказываются

$$\gamma_\parallel \to \gamma_\perp + \gamma_\perp, \tag{130,11}$$

$$\gamma_\parallel \to \gamma_\parallel + \gamma_\perp. \tag{130,12}$$

Уже было отмечено, что импульсы $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ направлены под малыми углами ϑ к импульсу начального фотона $\mathbf{k}$. Если пренебречь этими углами, т. е. считать импульсы всех фотонов параллельными (будем называть такое приближение коллинеарным), то распад (130,12) окажется невозможным, как это видно из следующих рассуждений.

Аналогично (127,4), представим амплитуду распада в виде

$$M_{fi} = M_{\lambda\mu\nu} e^\lambda e_1^{\mu *} e_2^{\nu *},$$

где e, e_1, e_2 — 4-векторы поляризации фотонов, определенные, как обычно, по их 4-потенциалам A. Выбрав трехмерную калибровку потенциалов, $e = (0, \mathbf{e})$, перепишем это выражение в виде

$$M_{fi} = M_{ikl} e_i e_{1k}^* e_{2l}^*.$$

Две независимые поляризации определяются ортами[1])

$$\mathbf{e}_\parallel \parallel [\mathbf{kb}], \quad \mathbf{e}_\perp \parallel [\mathbf{k}[\mathbf{kb}]].$$

Легко видеть, что в разложении

$$M_{ikl} = \sum_{\lambda\lambda_1\lambda_2} M_{\lambda\lambda_1\lambda_2} e_i^{(\lambda)*} e_k^{(\lambda_1)} e_l^{(\lambda_2)}$$

[1]) Индексы $\parallel$ и $\perp$ соответствуют определенным выше поляризациям. Надо помнить, что орты $\mathbf{e}$ определяют направления векторного потенциала $\mathbf{A}$ (и тем самым поля $\mathbf{E}'$) и перпендикулярны направлению $\mathbf{B}'$.

(индексы λ, λ_1, λ_2 пробегают значения $\perp$, $\|$; ср. (127,9)) векторы $\mathbf{e}_\perp$ должны встречаться в каждом члене четное (0 или 2) число раз. Действительно, амплитуда M_{fi} инвариантна относительно преобразования CP, а поскольку потенциалы $\mathbf{A}$ (а с ними и $\mathbf{e}$) CP-инвариантны, то должен быть CP-инвариантен также и тензор M_{ikl}. При CP-преобразовании $\mathbf{e}_\| \to \mathbf{e}_\|$, $\mathbf{e}_\perp \to -\mathbf{e}_\perp$ (зарядовое сопряжение меняет знак $\mathbf{b}$, а инверсия меняет знак $\mathbf{k}$, оставляя аксиальный вектор $\mathbf{b}$ неизменным). Поэтому если в каком-либо члене разложения вектор $\mathbf{e}_\perp$ входит один раз, то соответствующий скаляр $M_{\lambda\lambda_1\lambda_2}$ должен быть CP-нечетен. Но из единственных двух (в коллинеарном приближении) векторов $\mathbf{k}=\mathbf{k}_1=\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{b}$, которые оба меняют знак при CP-преобразовании, нельзя составить CP-нечетного скаляра, чем и доказывается сделанное утверждение.

Таким образом, в коллинеарном приближении распад (130,12) запрещен. Более детальная оценка показывает, что отношение амплитуды этого процесса к амплитуде разрешенного в коллинеарном приближении распада (130,11):

$$\frac{M_{\|\perp,\|}}{M_{\perp\perp,\|}} \sim \vartheta^2 \sim \alpha\left(\frac{B_0}{B_{\text{кр}}}\right)^2, \qquad (130,14)$$

где

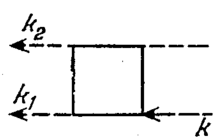
$$B_{\text{кр}} = \frac{m^2}{|e|}\left(=\frac{m^2c^3}{|e|\hbar} = 4{,}4\cdot 10^{13}\ \text{Гс}\right)$$

(углы ϑ оцениваются из (130,9) как $\vartheta^2 \sim n_\perp - n_\|$).

Тот факт, что из всех распадов оказывается возможным (в главном приближении) лишь распад $\gamma_\| \to \gamma_\perp + \gamma_\perp$, означает, что в неполяризованном пучке фотонов, распространяющихся в магнитном поле, в конце концов устанавливается перпендикулярная ($\perp$) поляризация.

Перейдем к вычислению амплитуды распада $M_{fi} \equiv M_{\perp\perp,\|}$ по теории возмущений, т. е. в предположении $B_0 \ll B_{\text{кр}}$.

Первые (по α и по внешнему полю) неисчезающие фейнмановские диаграммы имеют вид



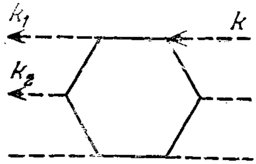
(130,15)

(со всеми возможными перестановками концов), где три концевые линии отвечают фотонам, а одна — внешнему полю. Но в коллинеарном приближении соответствующая этим диаграммам амплитуда обращается в нуль. Действительно, в силу калибровочной инвариантности внешнее поле может войти в амплитуду процесса лишь в виде 4-тензора его напряженностей $F_{\mu\nu}$, а 4-векторы поляризации фотонов — лишь в антисимметричных комбинациях

$$f_{\mu\nu} = k_\mu e_\nu - k_\nu e_\mu$$

с волновыми 4-векторами. Окончательное выражение для амплитуды строится из тензора внешнего поля $F_{\mu\nu}$, тензоров $f_{\mu\nu}$, $f_{1\mu\nu}$, $f_{2\mu\nu}$ трех фотонов и их волновых 4-векторов k_μ, $k_{1\mu}$, $k_{2\mu}$; при этом оно должно быть линейным по каждому из тензоров $f_{\mu\nu}$, а для диаграмм (130,15) — линейным и по $F_{\mu\nu}$. В коллинеарном приближении 4-векторы k_1 и k_2 сводятся к k: $k_1 = k\omega_1/\omega$, $k_2 = k\omega_2/\omega$. В этих условиях всякое скалярное произведение, построенное указанным образом, обращается тождественно в нуль: легко сообразить, что такое произведение будет содержать по крайней мере один равный нулю множитель k^2 или ke.

Таким образом, в коллинеарном приближении первый отличный от нуля вклад в амплитуду распада возникает лишь от шестиугольных диаграмм вида



(130,16)

с тремя линиями внешнего поля[1]). Отвечающая таким диаграммам амплитуда строится уже с тремя множителями $F_{\mu\nu}$. Такие скалярные произведения могут быть отличны от нуля. Но все отличные от нуля произведения содержат волновые векторы фотонов только через посредство тензоров $f_{\mu\nu}$; легко сообразить, что добавление еще и других множителей k приведет к появлению в произведении равных нулю множителей k^2 или ke. Но компоненты тензора $f_{\mu\nu}$ совпадают с компонентами напряженностей $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{B}'$ поля фотона. Это значит, что если амплитуду распада, отвечающую диаграммам (130,16), представить как матричный элемент некоторого оператора, то этот оператор, будучи выражен через операторы напряженностей полей фотонов, не зависит от их частот. В свою очередь, отсюда следует, что вычисление амплитуды распада (отвечающей диаграмме (130,16)) с помощью лагранжиана (129,17) даст правильный ответ, не ограниченный условием $\omega \ll m$.

В конце § 127 было объяснено, каким образом гамильтониан взаимодействия получается из найденной в § 129 лагранжевой

[1]) Поправки же, связанные с учетом неколлинеарности в диаграммах (130,5), дали бы в амплитуде вклад следующего порядка по α по сравнению с вкладом от диаграмм (130,16).

функции L. Теперь речь идет о процессе с участием трех фотонов, и соответствующий оператор взаимодействия получается из членов разложения L, содержащих тройные произведения полей фотонов $\mathbf{E}'$, $\mathbf{B}'$. При этом надо рассматривать только член вида

$$(\mathbf{B}'\mathbf{B}_0)(\mathbf{E}'\mathbf{B}_0)^2, \tag{130,17}$$

в который каждый из векторов $\mathbf{B}'$ и $\mathbf{E}'$ входит умноженным скалярно на $\mathbf{B}_0$. Действительно, произведения $\mathbf{E}'^2$, $\mathbf{B}'^2$, $\mathbf{E}'\mathbf{B}'$ происходят, в четырехмерной записи, от скаляров вида $f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}$, которые в коллинеарном приближении тождественно обращаются в нуль. Тот факт, что выбран член именно с одним множителем $\mathbf{B}'$ и двумя $\mathbf{E}'$, связан с тем, что рассматривается процесс с одним $\|$-фотоном и двумя $\perp$-фотонами; у первого составляющую вдоль $\mathbf{B}_0$ имеет поле $\mathbf{B}'$, а у последних — поле $\mathbf{E}'$.

Функция Лагранжа L выражается через инварианты $\mathcal{F} = (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E})^2/2$ и $\mathcal{G} = \mathbf{EB}$. Нужный нам член разложения получается из члена $\infty\mathcal{F}\mathcal{G}^2$. Вычисление с помощью (129,17) дает для последнего выражение

$$-\frac{13e^6}{630\pi^2 m^8}\mathcal{F}\mathcal{G}^2.$$

Положив $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$ и взяв из $\mathcal{F}$ слагаемое $\mathbf{B}_0\mathbf{B}'$, а из $\mathcal{G}$ — слагаемое $\mathbf{B}_0\mathbf{E}'$, получим искомый член разложения вида (130,17). Таким образом, оператор трехфотонного взаимодействия, приводящего к распаду $\gamma_\| \to \gamma_{1\perp} + \gamma_{2\perp}$, дается выражением

$$\hat{V}^{(3)} = \frac{13e^6}{315\pi^2 m^8}\int(\mathbf{B}_0\hat{\mathbf{E}}_1')(\mathbf{B}_0\hat{\mathbf{E}}_2')(\mathbf{B}_0\hat{\mathbf{B}}')\,d^3x, \tag{130,18}$$

где

$$\hat{\mathbf{B}}' = i\sqrt{4\pi}\,[\mathbf{k}\mathbf{e}_\|]\,e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\hat{c}_{\mathbf{k}\|},$$

$$\hat{\mathbf{E}}_1' = -i\sqrt{4\pi}\,\omega_1\mathbf{e}_\perp e^{-i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}-\omega_1 t)}\hat{c}^+_{\mathbf{k}_1\perp}$$

и аналогично для $\hat{\mathbf{E}}_2'$; ср. (127,26—27)[1]).

Согласно изложенным в § 64 правилам амплитуда распада M_{fi} вычисляется по определению

$$S_{fi} = -i\langle f|\int\hat{V}^{(3)}dt\,|i\rangle = i(2\pi)^4\delta^{(4)}(k - k_1 - k_2)\,M$$

и равна

$$M_{fi} = -i\frac{13e^6}{315\pi^2 m^8}(4\pi)^{3/2}\omega\omega_1\omega_2 B_0^3\sin^3\theta$$

[1]) Удвоение коэффициента в (130,18) — за счет того, что $\mathbf{E}_1'$ и $\mathbf{E}_2'$ могут быть взяты из каждого из двух множителей $\mathbf{E}'$ в L.

(θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}_0$). Вероятность распада в единицу времени (см. (64,11)):

$$dw = (2\pi)^4 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\,\delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)\,|M_{fi}|^2 \frac{d^3k_1 d^3k_2}{2\cdot 2\omega\cdot 2\omega_1\cdot 2\omega_2\cdot(2\pi)^6}$$

(лишний множитель $^1/_2$ учитывает уменьшение фазового объема за счет тождественности двух конечных фотонов). Первая δ-функция устраняется интегрированием по d^3k_2. Для устранения второй δ-функции замечаем, что при пренебрежении дисперсией:

$$\omega - \omega_1 - \omega_2 = k - k_1 - |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| \approx -\frac{kk_1}{k-k_1}(1 - \cos\vartheta_1)$$

и потому [1])

$$\int_0^\omega\int_0^1 \omega\omega_1\omega_2\delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)\,d\cos\vartheta_1\cdot 2\pi\omega_1^2 d\omega_1 =$$

$$= 2\pi\int_0^\omega \omega_1^2(\omega - \omega_1)^2 d\omega_1 = \frac{\pi}{15}\omega^5.$$

Окончательно находим для полной вероятности распада фотона в единицу времени (обычные единицы):

$$w = \frac{\alpha^3}{15\pi^2}\left(\frac{13}{315}\right)^2 \frac{mc^2}{\hbar}\left(\frac{\hbar\omega}{mc^2}\right)^5\left(\frac{B_0\sin\theta}{B_{\text{кр}}}\right)^6 =$$

$$= 0{,}18\alpha^6\frac{mc^2}{\hbar}\left(\frac{B_0^2\sin^2\theta}{8\pi mc^2}\right)^3\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^9\left(\frac{\hbar\omega}{mc^2}\right)^5. \qquad (130{,}19)$$

Как уже упоминалось, применимость этой формулы не требует условия $\omega \ll m$. Она ограничена лишь условием малости членов, отвечающих диаграммам восьмого порядка. Для оценки заметим, что в матричном элементе восьмого порядка может иметься, например, член, отличающийся от членов шестого порядка безразмерным инвариантным множителем вида $(eF^{\mu\nu}k_\nu/m^3)^2$. Условие его малости приводит к весьма слабому условию

$$\omega \ll m\,(m^2/|e|B_0).$$

---

[1]) При этом подразумевается, что при учете дисперсии аргумент δ-функции действительно обращался бы в нуль при некотором $\cos\vartheta_1 < 1$. Таким образом, дисперсия требуемого характера необходима для того, чтобы распад был возможным, но сама вероятность распада от дисперсии (если она мала) не зависит.