## § 131. Вычисление интегралов по четырехмерным областям

Сведем здесь некоторые правила и формулы, полезные для вычисления интегралов, возникающих в теории радиационных поправок. Типичная формула интеграла, отвечающего диаграмме Фейнмана:

$$\int \frac{f(k)\, d^4k}{a_1 a_2 \ldots a_n}, \tag{131,1}$$

где $a_1, a_2, \ldots$ — полиномы второй степени по 4-вектору $k$, $f(k)$ — полином какой-либо степени $n'$, а интегрирование производится по всему четырехмерному $k$-пространству.

Удобный метод вычисления таких интегралов (принадлежащий *Фейнману*, 1949) основан на предварительном преобразовании (параметризации) подынтегрального выражения путем введения дополнительных интегрирований по вспомогательным переменным $\xi_1, \xi_2, \ldots$ согласно формуле

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} = (n-1)! \int_0^1 d\xi_1 \ldots \int_0^1 d\xi_n \frac{\delta(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - 1)}{(a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\xi_n)^n}. \tag{131,2}$$

В результате такого преобразования вместо $n$ различных квадратичных полиномов в знаменателе возникает $n$-я степень всего одного полинома второй степени.

Устранив $\delta$-функцию интегрированием по $d\xi_n$ и введя новые переменные согласно

$$\xi_1 = x_{n-1}, \quad \xi_2 = x_{n-2} - x_{n-1}, \quad \ldots, \quad \xi_{n-1} = x_1 - x_2,$$
$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{n-1} = x_1,$$

получим формулу (131,2) в эквивалентном виде:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots$$
$$\ldots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \frac{1}{[a_1 x_{n-1} + a_2(x_{n-2} - x_{n-1}) + \ldots + a_n(1 - x_1)]^n}. \tag{131,3}$$

При $n = 2$ эта формула имеет вид

$$\frac{1}{a_1 a_2} = \int_0^1 \frac{dx}{[a_1 x + a_2(1-x)]^2} \tag{131,4}$$

и проверяется прямым вычислением. Для произвольного же $n$ формула может быть доказана по индукции от $n - 1$ к $n$. Действительно, произведя в (131,3) интегрирование по $dx_{n-1}$, получим в правой стороне равенства разность двух $(n-2)$-кратных интегралов того же вида. Предполагая для них формулу справедливой, получаем $\frac{1}{a_1-a_2}\left[\frac{1}{a_2a_3\ldots a_n}-\frac{1}{a_1a_3\ldots a_n}\right]$, что совпадает с выражением в левой стороне равенства (131,3).

Дифференцированием (131,3) по $a_1$, $a_2$, ... можно получить аналогичные формулы, служащие для параметризации интегралов, содержащих в знаменателях какие-либо из полиномов в степенях выше первой.

Регуляризация расходящихся интегралов осуществляется вычитанием из них интегралов аналогичного вида. Для вычисления такой разности может оказаться целесообразным предварительное преобразование разности подынтегральных выражений (каждое из которых уже было преобразовано с помощью (131,2)) с помощью формулы

$$\frac{1}{a^n}-\frac{1}{b^n}=-\int_0^1\frac{n(a-b)\,dz}{[(a-b)z+b]^{n+1}}. \tag{131,5}$$

После преобразования согласно (131,3) четырехмерное интегрирование в (131,1) приводится к виду

$$\int\frac{f(k)\,d^4k}{[(k-l)^2-\alpha^2]^n}, \tag{131,6}$$

где $l$ — 4-вектор, а $\alpha^2$ — скаляр, зависящие от параметров $x_1, \ldots, x_{n-1}$; скаляр $\alpha^2$ будем считать положительным.

Если интеграл (131,6) сходится, то в нем можно произвести замену переменных согласно $k-l\to k$ (сдвиг начала координат), после чего он принимает вид

$$\int\frac{f(k)\,d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n} \tag{131,7}$$

(с другой функцией $f(k)$), так что знаменатель содержит лишь квадрат $k^2$. Что касается числителя, то достаточно ограничиться рассмотрением скалярных функций $f=F(k^2)$. Действительно, для интегралов с числителями другого вида имеем

$$\int\frac{k^\mu F(k^2)\,d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n}=0, \tag{131,8}$$

$$\int\frac{k^\mu k^\nu F(k^2)\,d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n}=\frac{1}{4}g^{\mu\nu}\int\frac{k^2F(k^2)\,d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n}, \tag{131,9}$$

$$\int\frac{k^\mu k^\nu k^\rho k^\sigma F(k^2)\,d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n}=$$

$$=\frac{1}{24}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}+g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}+g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})\int\frac{(k^2)^2F(k^2)\,d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n} \tag{131,10}$$

и т. д., что очевидно уже из соображений симметрии (при интегрировании по всем направлениям $k$).

В исходном интеграле (131,1) каждый из множителей $a_1$, $a_2$, ... в знаменателе имеет (как функция от $k_0$) по два нуля, которые обходятся при интегрировании по $dk_0$ согласно обычному правилу (см. § 75). После преобразования к виду (131,7) вместо $2n$ простых полюсов подынтегральное выражение имеет всего два полюса $n$-го порядка, которые обходятся по тому же правилу (путь $C$ на рис. 25). Смещая контур интегрирования, как показано стрелками, можно совместить его с мнимой осью в плоскости $k_0$ ($C'$ на рис. 25). Другими словами, переменная $k_0$ заменится на $k_0 = ik_0'$ с вещественной переменной $k_0'$. Изменив также обозначение $\mathbf{k}$ на $\mathbf{k}'$, будем иметь

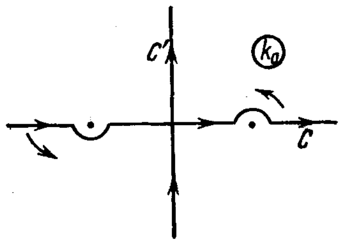

Рис. 25

$$k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 \rightarrow -\left(k_0'^2 + \mathbf{k}'^2\right) = -k'^2, \qquad (131,11)$$

где $k'$ — 4-вектор в евклидовой метрике. При этом

$$d^4k \rightarrow id^4k' = ik'^2 d\,\frac{k'^2}{2}\,d\Omega,$$

где $d\Omega$ — элемент четырехмерных телесных углов. Интегрирование по $d\Omega$ дает $2\pi^2$ (см. II, § 111), после чего

$$d^4k \rightarrow i\pi^2 k'^2 d\left(k'^2\right). \qquad (131,12)$$

Обозначив $k'^2 = z$, получим окончательно

$$\int \frac{F(k^2)\,d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n} = (-1)^n i\pi^2 \int\limits_0^\infty \frac{F(-z)\,z\,dz}{(z+\alpha^2)^n}. \qquad (131,13)$$

В частности,

$$\int \frac{d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n} = \frac{(-1)^n i\pi^2}{\alpha^{2(n-2)}(n-1)(n-2)}. \qquad (131,14)$$

Логарифмически расходящаяся часть в интегралах (131,7) может быть выделена в виде

$$\int \frac{d^4k}{[(k-l)^2-\alpha^2]^2}. \qquad (131,15)$$

Легко видеть, что и в таком интеграле допустимо преобразование $k \to k + l$. Действительно, разность первоначального и преобразованного интегралов

$$\int \left\{ \frac{1}{[(k-l)^2 - \alpha^2]^2} - \frac{1}{(k^2 - \alpha^2)^2} \right\} d^4k$$

представляет собой сходящийся интеграл, и потому в нем замена $k \to k + l$ во всяком случае допустима. Произведя ее и заменив еще затем $k \to -k$, получим ту же величину с обратным знаком, откуда и следует ее равенство нулю.

Линейно расходящийся интеграл должен иметь вид

$$\int \frac{k^\mu d^4k}{[(k-l)^2 - \alpha^2]^2}, \qquad (131,16)$$

но фактически такой интеграл расходится лишь логарифмически: подынтегральное выражение асимптотически (при $k \to \infty$) равно $k^\mu/(k^2)^2$ и обращается в нуль при усреднении по направлениям. Сдвиг начала координат, однако, не оставляет интеграл (131,16) неизменным, а добавляет к нему аддитивную постоянную. Продемонстрируем это для случая бесконечно малого сдвига $k \to k + \delta l$, вычислив разность

$$\Delta^\mu = \int \left\{ \frac{k^\mu}{[(k-\delta l)^2 - \alpha^2]^2} - \frac{k^\mu + \delta l^\mu}{(k^2 - \alpha^2)^2} \right\} d^4k. \qquad (131,17)$$

С точностью до членов первого порядка по $\delta l$

$$\Delta^\mu = \int \left\{ \frac{4k^\mu (k\,\delta l)}{(k^2 - \alpha^2)^3} - \frac{\delta l^\mu}{(k^2 - \alpha^2)^2} \right\} d^4k.$$

В первом члене усреднение по направлениям заменяет числитель на $k^2 \delta l^\mu$ (ср. (131,9)), после чего находим [1])

$$\Delta^\mu = \alpha^2\, \delta l^\mu \int \frac{d^4k}{(k^2 - \alpha^2)^3} = -\frac{i\pi^2}{2}\, \delta l^\mu. \qquad (131,18)$$

В окончательных выражениях для радиационных поправок часто фигурирует трансцендентная функция, определяемая интегралом

$$F(\xi) = \int_0^\xi \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx \qquad (139,19)$$

---

[1]) Более громоздкое вычисление приводит к такому же результату и при конечном $l$.

(ее называют иногда *функцией Спенса*). Отметим здесь для справок некоторые ее свойства:

$$F(\xi) + F\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\ln^2 \xi, \tag{131,20}$$

$$F(-\xi) + F(-1+\xi) = -\frac{\pi^2}{6} + \ln\xi \ln(1-\xi), \tag{131,21}$$

$$F(1) = \frac{\pi^2}{12}, \qquad F(-1) = -\frac{\pi^2}{6}. \tag{131,22}$$

Разложение при малых $\xi$:

$$F(\xi) = \xi - \frac{\xi^2}{4} + \frac{\xi^3}{9} - \frac{\xi^4}{16} + \ldots \tag{131,23}$$