ГЛАВА XIII

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§ 132. Асимптотическое поведение фотонного пропагатора при больших импульсах

В § 113 был вычислен первый (по α) член разложения поляризационного оператора $\mathscr{P}(k^2)$ и было найдено, что при $|k^2| \gg m^2$ с логарифмической точностью он имеет вид

$$\mathscr{P}(k^2) = \frac{\alpha}{3\pi} k^2 \ln \frac{|k^2|}{m^2}. \qquad (132,1)$$

Там же было указано, что по смыслу вывода этой формулы (как поправки первого приближения к пропагатору $4\pi D^{-1} = k^2$) предполагается выполненным условие

$$\frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|k^2|}{m^2} \ll 1, \qquad (132,2)$$

чем ограничивается применимость формулы со стороны больших $|k^2|$. Покажем теперь, что в действительности выражение (132,1) остается справедливым и при гораздо более слабом условии

$$\frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|k^2|}{m^2} \lesssim 1. \qquad (132,3)$$

Ход доказательства состоит в следующем[1]). Прежде всего, замечаем, что хотя при условии (132,3) вклад в $\mathscr{P}(k^2)$ может возникать, в принципе, от членов всех порядков (по α) ряда теории возмущений, но в каждом (n-м) порядке надо учитывать только члены $\sim \alpha^n \ln^n(|k^2|/m^2)$, содержащие большой логарифм в той же степени, что и α; члены с более низкими степенями логарифма заведомо малы в силу неравенства $\alpha \ll 1$.

Далее, исследование ряда теории возмущений для $\mathscr{P}$ можно свести к исследованию рядов для $\mathscr{G}$ и Γ^μ с помощью уравнения Дайсона

$$\mathscr{P}(k^2) = i\frac{4\pi\alpha}{3} \operatorname{Sp} \int \gamma_\mu \mathscr{G}(p+k)\, \Gamma^\mu(p+k,\ p;\ k)\, \mathscr{G}(p) \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \qquad (132,4)$$

[1]) Излагаемая постановка вопроса и результаты принадлежат *Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосову* и *И. М. Халатникову* (1954).

(см. (107,4)). Поскольку функция $\mathcal{P}(k^2)$ калибровочно-инвариантна, при ее вычислении можно выбрать любую калибровку для величин $\mathcal{G}$ и Г. Наиболее удобна для этой цели калибровка Ландау, в которой пропагатор свободных фотонов имеет вид (76,11):

$$D_{\mu\nu}(k)=\frac{4\pi}{k^2}\left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \tag{132,5}$$

($D^{(l)}=0$ в (103,17)). Оказывается, что в такой калибровке ряды теории возмущений для $\mathcal{G}$ и Γ^μ вообще не содержат членов с нужными степенями логарифмов. Поэтому в (132,4) достаточно подставить для $\mathcal{G}$ и Γ^μ их нулевые приближения: $\mathcal{G}=G$, $\Gamma^\mu=\gamma^\mu$. Тогда выражение (132,4) сводится к интегралу

$$\mathcal{P}(k^2)=i\frac{4\pi\alpha}{3}\operatorname{Sp}\int\gamma_\mu G(p+k)\gamma^\mu G(p)\frac{d^4p}{(2\pi)^4}. \tag{132,6}$$

Это — интеграл Фейнмана, отвечающий диаграмме (113,1) первого (по α) приближения, который и приводит (после соответствующей перенормировки) к формуле (132,1).

Приступая к доказательству сделанных утверждений, проследим прежде всего за происхождением логарифма в интеграле (132,6). Легко видеть, что логарифмический член возникает от области интегрирования

$$p^2\gg|k^2|\quad\text{при}\quad|k^2|\gg m^2. \tag{132,7}$$

Действительно, формально разлагая G по степеням $1/\gamma p$, имеем

$$G(p)\approx\frac{1}{\gamma p}=\frac{\gamma p}{p^2},$$

$$G(p-k)\approx\frac{1}{\gamma p-\gamma k}\approx\frac{1}{\gamma p}+\frac{1}{\gamma p}\gamma k\frac{1}{\gamma p}+\frac{1}{\gamma p}\gamma k\frac{1}{\gamma p}\gamma k\frac{1}{\gamma p}=$$
$$=\frac{\gamma p}{p^2}+\frac{(\gamma p)(\gamma k)(\gamma p)}{(p^2)^2}+\frac{(\gamma p)(\gamma k)(\gamma p)(\gamma k)(\gamma p)}{(p^2)^3}.$$

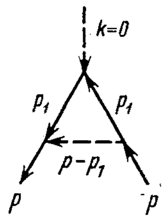
При подстановке в (132,6) первый член, не зависящий от k, выпадает в результате регуляризации (в соответствии с условием $\mathcal{P}/k^2\to 0$ при $k^2\to 0$). Второй член обращается в нуль при интегрировании по направлениям p. Третий же интеграл логарифмически расходится по p^2; взяв его в пределах от $p^2\sim|k^2|$ (нижний предел области (132,7)) до некоторого вспомогательного «параметра обрезания» Λ^2, получим

$$-\frac{\alpha}{3\pi}k^2\ln\frac{\Lambda^2}{|k^2|}. \tag{132,8}$$

Для регуляризации следует вычесть из $\mathcal{P}/k^2$ его значение при $k^2=0$. Но поскольку логарифмическая точность предполагает условие $|k^2|\gg m^2$, при вычислении с этой точностью регуляризация осуществляется вычитанием значения при $|k^2| \sim m^2$, в результате чего Λ^2 в аргументе логарифма заменяется на m^2 и мы приходим к (132,1).

Так как интересующие нас поправки в $\mathcal{G}$ и Γ^μ имеют логарифмический характер, то с их учетом $\mathcal{G}$ и Γ^μ будут отличаться от G и γ^μ медленно меняющимися логарифмическими множителями. Поэтому и в точном интеграле (132,4) будет существенна та же область (132,7), что и в приближенном интеграле (132,6). Тем не менее положить просто $k=0$ в $\Gamma^\mu(p+k, p; k)$ нельзя: ввиду квадратичной расходимости интеграла его регуляризация требует рассмотрения также и двух следующих членов разложения $\Gamma^\mu(p+k, p; k)$ по степеням k. Мы, однако, ограничимся здесь обсуждением поправок к $\Gamma^\mu(p, p, 0)$, достаточно ясно демонстрирующим роль выбора калибровки и различие в характере интегралов, возникающих от диаграмм разных типов. Отметим также, что в аналогичном исследовании для $\mathcal{G}$ нет необходимости, поскольку поправки в Γ и $\mathcal{G}$ связаны друг с другом тождеством Уорда (108,8).

Первой (по α) поправке к $\Gamma(p, p; 0)$ отвечает диаграмма



и соответственно интеграл [1])

$$\Gamma^{\mu(1)} = -i\alpha \int \gamma^\lambda G(p_1)\gamma^\mu G(p_1)\gamma^\nu D_{\lambda\nu}(p-p_1)\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}. \qquad (132,9)$$

В обычной калибровке имеем

$$D_{\lambda\nu}(p-p_1) = g_{\lambda\nu}\frac{4\pi}{(p-p_1)^2},$$

и в интеграле существенна область $p_1^2 \gg p^2$, в которой он логарифмически расходится. Вычислив интеграл

$$\Gamma^{\mu(1)} \approx -4\pi i\alpha \int \frac{\gamma^\lambda(\gamma p_1)\gamma^\mu(\gamma p_1)\gamma_\lambda}{(p_1^2)^3}\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \qquad (132,10)$$

[1]) Во избежание недоразумений при сравнении с результатами § 117 напомним, что в § 117 оба электронных конца диаграммы предполагались физическими, между тем как здесь предполагается $p \gg |k^2| \gg m^2$, т. е. обе линии заведомо не физические.

и регуляризовав логарифм, получим

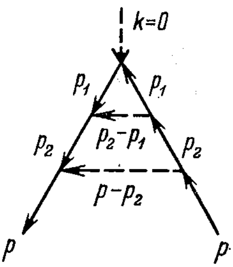
$$\Gamma^{\mu(1)} \approx -\frac{\alpha}{4\pi}\gamma^{\mu}\ln\frac{p^2}{m^2}.$$

В калибровке же Ландау вместо (132,10) получим интеграл

$$\Gamma^{\mu(1)} \approx -4\pi\alpha i\int\{\gamma^{\lambda}(\gamma p_1)\gamma^{\mu}(\gamma p_1)\gamma_{\lambda}-p_1^2\gamma^{\mu}\}\frac{d^4p_1}{(p_1^2)^3(2\pi)^4}.$$

Произведя усреднение по направлениям p_1 и приведение матриц γ, найдем, что этот интеграл обращается в нуль, так что логарифмический член в $\Gamma^{\mu(1)}$ выпадает [1]).

В поправках второго (по α) порядка рассмотрим диаграмму



Соответствующий интеграл:

$$\Gamma^{\mu(2)} = -\alpha^2\int\gamma^{\lambda}G(p_2)\gamma^{\nu}G(p_1)\gamma^{\mu}G(p_1)\gamma^{\rho}G(p_2)\gamma^{\sigma}\times$$
$$\times D_{\nu\rho}(p_2-p_1)D_{\lambda\sigma}(p-p_2)\frac{d^4p_1d^4p_2}{(2\pi)^8}.$$

При обычной калибровке D-функций этот интеграл содержит член с квадратом логарифма, происходящий от области интегрирования

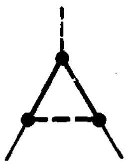
$$p_1^2 \gg p_2^2 \gg p^2. \qquad (132,11)$$

Действительно, после пренебрежения p_2 в аргументе функции $D_{\nu\rho}(p_2-p_1)$ интегрирование по d^4p_1 становится таким же, как в (132,9), и дает $\ln p_2^2$; последующее же интегрирование по d^4p_2 снова имеет логарифмический характер и приводит к квадрату $\ln^2(p_2^2/m^2)$. При выборе же для D-функций калибровки Ландау при обоих интегрированиях логарифмические члены выпадают.

---

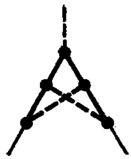
[1]) Поправки к G^{-1} в обеих калибровках, найденные из поправки $\Gamma^{(1)}$ с помощью тождества (108,8), согласуются, конечно, с результатами § 119.

Такая же ситуация имеет место для всех других диаграмм, входящих в скелетную диаграмму



(132,12)

Диаграммы же других типов, с пересекающимися фотонными линиями, например, входящие в скелетную диаграмму



(131,13)

(ср. (106,11)), вообще не содержат членов с нужной степенью логарифма ни в какой калибровке (в них нельзя выделить такую область значений переменных, в которой интеграл сводился бы к нескольким последовательным логарифмическим интегрированиям).

Эти рассуждения (и аналогичные для следующих членов разложения Г по степеням k) подтверждают, что в калибровке Ландау не возникает поправок к $\mathcal{G}$ и Г с нужными степенями логарифма, так что выражение (132,1) действительно справедливо и при условии (132,3).

Функция $\mathcal{D}(k^2)$, соответствующая поляризационному оператору (132,1), имеет вид

$$\mathcal{D}(k^2)=\frac{4\pi}{k^2}\frac{1}{1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{|k^2|}{m^2}}. \qquad (132,14)$$

В силу условия (132,3) разлагать это выражение по степеням α нет необходимости.

§ 133. Связь между «затравочным» и истинным зарядами

Применимость формулы (132,14) ограничена, однако, со стороны больших $|k^2|$ в связи с уменьшением ее знаменателя. Действительно, вывод этой формулы основан на пренебрежении диаграммой (132,13) (и другими, с еще большим числом жирных фотонных линий) по сравнению с диаграммой (132,12). Но добавление каждой такой линии привносит в диаграмму множитель $e^2\mathcal{D}$ с точным пропагатором $\mathcal{D}$. При этом роль малого