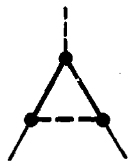
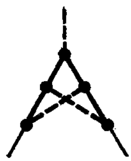
Такая же ситуация имеет место для всех других диаграмм, входящих в скелетную диаграмму



(132,12)

Диаграммы же других типов, с пересекающимися фотонными линиями, например, входящие в скелетную диаграмму



(131,13)

(ср. (106,11)), вообще не содержат членов с нужной степенью логарифма ни в какой калибровке (в них нельзя выделить такую область значений переменных, в которой интеграл сводился бы к нескольким последовательным логарифмическим интегрированиям).

Эти рассуждения (и аналогичные для следующих членов разложения Г по степеням k) подтверждают, что в калибровке Ландау не возникает поправок к $\mathcal{G}$ и Г с нужными степенями логарифма, так что выражение (132,1) действительно справедливо и при условии (132,3).

Функция $\mathcal{D}(k^2)$, соответствующая поляризационному оператору (132,1), имеет вид

$$\mathcal{D}(k^2)=\frac{4\pi}{k^2}\frac{1}{1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{|k^2|}{m^2}}. \tag{132,14}$$

В силу условия (132,3) разлагать это выражение по степеням α нет необходимости.

§ 133. Связь между «затравочным» и истинным зарядами

Применимость формулы (132,14) ограничена, однако, со стороны больших $|k^2|$ в связи с уменьшением ее знаменателя. Действительно, вывод этой формулы основан на пренебрежении диаграммой (132,13) (и другими, с еще большим числом жирных фотонных линий) по сравнению с диаграммой (132,12). Но добавление каждой такой линии привносит в диаграмму множитель $e^2\mathcal{D}$ с точным пропагатором $\mathcal{D}$. При этом роль малого параметра играет, вместо $\alpha = e^2$, величина

$$\frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|k^2|}{m^2}} \ll 1. \tag{133,1}$$

Когда, по мере возрастания $|k^2|$, эта величина по порядку сравнивается с единицей, из теории, по существу, вообще исчезает малый параметр.

Возникающую ситуацию можно понять более ясно, если при выводе (132,14) производить перенормировку не «на ходу», а путем предварительного введения «затравочного» заряда электрона e_c, который в дальнейшем подбирается так, чтобы привести к правильному наблюдаемому значению физического заряда e (см. § 110). Если интеграл «обрезается», как это было сделано выше, на вспомогательном верхнем пределе Λ^2, то затравочный заряд будет его функцией, $e_c = e_c(\Lambda^2)$, и в заключение должен быть произведен переход к пределу $\Lambda \to \infty$.

При таком способе подхода к задаче поляризационный оператор будет

$$\mathscr{P}(k^2) = -\frac{e_c^2}{3\pi} k^2 \ln \frac{\Lambda^2}{|k^2|}$$

(выражение (132,8) с e_c вместо e), и соответственно

$$\mathscr{D}(k^2) = \frac{4\pi}{k^2} \frac{1}{1 + \frac{e_c^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{|k^2|}}. \tag{133,2}$$

Определив теперь физический заряд e согласно условию

$$e_c^2 \mathscr{D}(k^2) \to \frac{4\pi}{k^2} e^2, \quad k^2 \to \sim m^2,$$

получим

$$e^2 = \frac{e_c^2}{1 + \frac{e_c^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}}, \tag{133,3}$$

или

$$e_c^2 = \frac{e^2}{1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}}. \tag{133,4}$$

Если формально перейти в (133,3) к пределу $\Lambda \to \infty$, то $e^2 \to 0$ независимо от вида функции $e_c^2(\Lambda)$. Такая «нулификация» заряда означает, разумеется, невозможность строгого проведения перенормировки. Этот переход к пределу нельзя, однако, произвести, не нарушив предположений, сделанных при выводе (133,3). Из (133,4) видно, что по мере увеличения Λ (при заданном значении e^2) e_c^2 растет; но уже при $e_c^2 \sim 1$ формулы теряют свою применимость, поскольку их вывод основан на предположении

$$e_c^2 \ll 1 \tag{133,5}$$

как условии применимости теории возмущений к «затравочному» взаимодействию. Нарушение неравенства (133,5) при увеличении Λ имеет важное принципиальное значение. Оно означает логическую неполноту квантовой электродинамики как теории со слабым взаимодействием. По существу это означает логическую неполноту имеющейся теории вообще. Действительно, ее аппарат связан именно с возможностью рассматривать электромагнитное взаимодействие как слабое возмущение. Все вычисляемые величины получаются в теории в виде рядов по степеням e_c^2, причем эти ряды являются в действительности асимптотическими. Для придания этим рядам определенного смысла при не малых значениях e_c^2, во всяком случае, требовались бы дополнительные соображения, не следующие из общих принципов существующей теории.

В то же время следует подчеркнуть, что в квантовой электродинамике описанные трудности могут иметь лишь чисто теоретическое значение. Они возникают при фантастически огромных энергиях, не представляющих никакого реального интереса [1]. Можно ожидать, что в действительности уже несравненно раньше электромагнитные взаимодействия «запутываются» со слабыми и сильными взаимодействиями, в результате чего чистая электродинамика теряет смысл [2].

В заключение этого параграфа покажем, каким образом формулы (133,3—4) могут быть получены с помощью простых рассуждений, основанных на смысле понятия перенормировки и на соображениях размерности (*M. Gell-Mann, F. Low*, 1954).

Рассмотрим квадрат затравочного заряда как функцию параметра обрезания, $e_c^2(\Lambda^2)$, и введем функцию d, определяющую соотношение между значениями e_c^2 при двух различных значениях ее аргумента: $e_c^2(\Lambda_2^2) = e_c^2(\Lambda_1^2)\,d$. При Λ_1^2, $\Lambda_2^2 \gg m^2$ функция d не зависит от m; будучи безразмерной величиной,

---

[1] Так, равенство $(\alpha/\pi)\ln(\varepsilon^2/m^2) = 1$ достигается при $\varepsilon \sim 10^{93}m$.

[2] Противоположная ситуация имеет место в теориях, в которых взаимодействие между частицами осуществляется не электромагнитным полем, а так называемыми полями Янга — Миллса. Связь перенормированного заряда с затравочным в таких теориях дается формулой типа (133,4), но с обратным знаком в знаменателе, так что при заданном значении e затравочный заряд e_c уменьшается с ростом Λ. Такое свойство теории называют асимптотической свободой. Разумеется, теория с асимптотической свободой принципиально отличается от теории с нулификацией заряда.

она может быть функцией только безразмерных же величин $e_c^2(\Lambda_1^2)$ и Λ_2^2/Λ_1^2:

$$e_c^2(\Lambda_2^2) = e_c^2(\Lambda_1^2)\, d\left(e_c^2(\Lambda_1^2),\ \frac{\Lambda_2^2}{\Lambda_1^2}\right). \tag{133,6}$$

От этого функционального соотношения можно перейти к дифференциальному уравнению. Для этого напишем равенство (133,6) для бесконечно близких значений Λ_1^2 и Λ_2^2. Обозначив $\Lambda_1^2 \equiv \xi$ и положив $\Lambda_2^2 = \xi + d\xi$, получим для функции $\alpha_c(\xi) \equiv e_c^2(\Lambda_1^2)$ следующее дифференциальное уравнение:

$$d\alpha_c = \varphi(\alpha_c)\frac{d\xi}{\xi}. \tag{133,7}$$

Здесь введено обозначение

$$\varphi(\alpha_c) = \alpha_c \left[\frac{\partial d(\alpha_c, x)}{\partial x}\right]_{x=1} \tag{133,8}$$

и учтено, что, по определению (133,6), $d(\alpha_c, 1) \equiv 1$. Интегрируя уравнение (133,7) в пределах от $\xi = \Lambda_1^2$ до $\xi = \Lambda_2^2$, получаем

$$\ln\frac{\Lambda_2^2}{\Lambda_1^2} = \int\limits_{e_c^2(\Lambda_1^2)}^{e_c^2(\Lambda_2^2)} \frac{d\alpha}{\varphi(\alpha)}. \tag{133,9}$$

Во всей области интегрирования e_c^2 мало. Поэтому можно воспользоваться для $\varphi(\alpha)$ выражением, отвечающим первому приближению теории возмущений. Поправка к затравочному заряду, e_c^2, дается величиной $e_c^2 k^2 \mathscr{P}(k^2)$. Взяв для поляризационного оператора его первое приближение (132,1), найдем

$$d\left(\alpha_c,\ \frac{\Lambda_2^2}{\Lambda_1^2}\right) = 1 + \frac{\alpha_c}{3\pi}\ln\frac{\Lambda_2^2}{\Lambda_1^2}, \qquad \varphi(\alpha_c) = \frac{\alpha_c^2}{3\pi},$$

после чего интегрирование в (133,9) приводит к результату

$$\frac{1}{3\pi}\ln\frac{\Lambda_2^2}{\Lambda_1^2} = \frac{1}{e_c^2(\Lambda_1^2)} - \frac{1}{e_c^2(\Lambda_2^2)}. \tag{133,10}$$

При $\Lambda_1^2 \to \sim m^2$ затравочный заряд $e_c(\Lambda_1^2)$ стремится к истинному заряду e, и тогда (133,10) совпадает с (133,3—4)[1]).

[1]) Систематическое развитие метода, основанного на использовании функциональных свойств пропагаторов и вершинных частей (так называемый метод ренормализационной группы), дано в книге: *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1984.