§ 134. Асимптотическое поведение амплитуд рассеяния при высоких энергиях

Рассмотрим вопрос об асимптотическом (при высоких энергиях) поведении амплитуд и сечений двухчастичных процессов рассеяния ($1+2\to 3+4$). Для основных электродинамических процессов в первом (по α) неисчезающем приближении ответ на этот вопрос может быть найден исходя из полученных в предыдущих главах конкретных формул, справедливых при любых энергиях. Здесь, однако, мы рассмотрим этот вопрос с более общей точки зрения, которая позволит находить такие асимптотики прямым способом.

Как и в § 66, введем инвариантные переменные

$$s=(p_1+p_2)^2,\quad t=(p_1-p_3)^2,\quad u=(p_1-p_4)^2 \tag{134,1}$$

(причем $p_1+p_2=p_3+p_4$); обозначения соответствуют реакциям в s-канале, которые мы и будем рассматривать. В ультрарелятивистском случае, когда энергии много больше масс частиц, в системе центра инерции энергии обеих частиц приближенно одинаковы. Обозначив посредством ε сумму энергий сталкивающихся частиц, получим в этой системе $p_1=(\varepsilon/2, \mathbf{p}_1)$, $p_2=(\varepsilon/2, -\mathbf{p}_1)$, $p_3=(\varepsilon/2, \mathbf{p}_3)$, $p_4=(\varepsilon/2, -\mathbf{p}_3)$, $\mathbf{p}_1^2=\mathbf{p}_3^2=\varepsilon^2/4$, и тогда

$$s=\varepsilon^2,\quad t=-\frac{s}{2}(1-\cos\theta),\quad u=-\frac{s}{2}(1+\cos\theta), \tag{134,2}$$

где θ — угол между $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_3$.

Рассмотрим сначала асимптотику сечения реакции при некотором фиксированном значении угла рассеяния θ. Тогда все три переменные s, t, u пропорциональны друг другу и устремляются к бесконечности вместе. В ультрарелятивистском случае массы частиц не могут войти в ответ, и единственной величиной размерности длины является $1/\varepsilon\,(=\hbar c/\varepsilon)$. Поэтому уже из соображений размерности следует, что дифференциальное сечение двухчастичных реакций уменьшается с ростом энергии по асимптотическому закону

$$d\sigma/do \propto 1/s \quad \text{при} \quad s,\ |t|,\ |u|\to\infty. \tag{134,3}$$

Если относить сечение не к элементу телесного угла do, а к дифференциалу dt, то (поскольку $do\propto dt/s$)

$$d\sigma/dt \propto 1/s^2. \tag{134,4}$$

Сечение выражается через амплитуду рассеяния (в ультрарелятивистском случае) как $d\sigma/do\propto|M_{fi}|^2/s$ — см. (64,22—23). Поэтому закон (134,3) означает, что в асимптотическом пределе амплитуда рассеяния не зависит от s:

$$M_{fi}=\text{const}. \tag{134,5}$$

Как ясно из характера вывода, эти результаты относятся не только к первому неисчезающему, но и к высшим (т. е. с учетом радиационных поправок) приближениям теории возмущений — если только не обращать внимания на логарифмические (вида $\ln(s/m^2)$) множители; зависимость от безразмерных логарифмов, разумеется, не может быть выяснена из соображений размерности [1]).

Иная ситуация возникает, если увеличивать s при фиксированном t, т. е. при фиксированном квадрате передаваемого импульса. Другими словами, рассматривается рассеяние на малые, убывающие с ростом энергии углы:

$$s \to \infty, \quad |t| \sim s\theta^2 = \mathrm{const}, \quad \theta \sim (|t|/s)^{1/2}. \tag{134,6}$$

В таком случае соображения размерности позволяют утверждать лишь, что суммарная степень $1/s$ и $1/t$ в $d\sigma/dt$ равна 2 (а в амплитуде M_{fi} — нулю)[2]). Поэтому для нахождения наименее быстро убывающей с ростом s части сечения надо выделить множитель, зависящий от $1/t$ в наибольшей степени. Но такие множители возникают, лишь если фейнмановскую диаграмму можно разделить между концами *1*, *3* и *2*, *4* на две части путем пересечения линий виртуальных частиц. Суммарный 4-импульс таких линий равен $p_1 - p_3$, от чего и возникает зависящий от $t = (p_1 - p_3)^2$ множитель. Таким образом, асимптотика диаграммы в области (134,6) зависит от характера возможных пересечений диаграммы в t-канале.

Аналогичным образом асимптотика в области

$$s \to \infty, \quad |u| \sim s(\pi - \theta)^2 = \mathrm{const}, \quad |\pi - \theta| \sim (|u|/s)^{1/2}, \tag{134,7}$$

отвечающая рассеянию на углы, близкие к π, определяется характером возможных пересечений диаграммы в u-канале (т. е. между концами *1*, *4* и *2*, *3*).

Простейший пример — рассеяние электрона на электроне, описывающееся диаграммами (73,13) и (73,14). Из них рассечение в t-канале по линии виртуального фотона допускает первая; она и определит асимптотическое поведение амплитуды рассеяния в области (134,6). Линии виртуального фотона отвечает D-функция, пропорциональная $1/t$. Поэтому асимптотики амплитуды и дифференциального сечения рассеяния:

$$M_{fi} \propto s/t, \quad d\sigma \propto dt/t^2. \tag{134,8}$$

[1]) Суммирование рядов, содержащих логарифмические поправки, может привести к экспоненциальной зависимости от логарифмов, что означает изменение показателя степенной зависимости. Это изменение, однако, мало в силу малости α.

[2]) Здесь предполагаем постоянное значение $|t| \gg m^2$. Получающиеся таким образом результаты остаются справедливыми — в смысле зависимости от s (т. е. от энергии) — и при $|t| \sim m^2$.

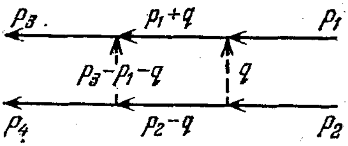
Асимптотика же в пределе (134,7) (вблизи направления назад) определяется «обменной» диаграммой (73,14); в этом пределе

$$M_{fi} \propto s/u, \quad d\sigma \propto du/u^2.$$

В случае взаимного рассеяния различных частиц (электрон и мюон) обменная диаграмма отсутствует; поэтому для него сечение рассеяния на углы $\theta \approx \pi$ убывает по закону (134,3—4)[1]).

Покажем, что эти результаты для асимптотики рассеяния электрона на электроне не меняются и при учете радиационных поправок. Для этого рассмотрим поправки различного рода к диаграмме (73,13).

Мы уже видели, что диаграммы, представляющие собой поправки к внутренней D-функции (см. (113,11)) или к вершинным частям (см. (117,1)), приводят лишь к логарифмическим поправкам в амплитуде; они не меняют степенной зависимости (134,8). Покажем, что то же самое относится к диаграмме, допускающей рассечение по двум (вместо одной) внутренним фотонным линиям:



(134,9)

Соответствующая этой диаграмме амплитуда рассеяния отличается от амплитуды, отвечающей диаграмме (73,13), заменой множителя $1/t$ на

$$\frac{(\gamma(p_1+q))(\gamma(p_2-q))}{(p_1+q)^2(p_2-q)^2q^2(p_3-p_1-q)^2}\,d^4q$$

с последующим интегрированием по d^4q. Существенная область интегрирования — та, которая приводит в результате к наименьшей степени $1/s$. Для этого во всяком случае q должно быть мало по сравнению с p_1, p_2. Отбросив малые в этом смысле члены (а также члены $p_1^2=p_2^2=m^2$), перепишем это выражение как

$$\frac{(\gamma p_1)(\gamma p_2)}{(p_1q)(p_2q)q^2(p_3-p_1-q)^2}\,d^4q. \tag{134,10}$$

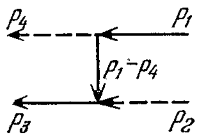
Знаменатель не будет содержать s, если q_0 и q_x (ось x — по направлению $\mathbf{p}_1=-\mathbf{p}_2$) будут $\propto 1/\sqrt{s}$, а компоненты q_y, q_z могут быть $\propto\sqrt{|t|}$; тогда область интегрирования $\propto 1/s$. Числитель же имеет порядок величины $p_1p_2\propto s$. Таким образом, за-

[1]) Все эти утверждения находятся, конечно, в согласии с результатами § 81 — см. (81,11) и задачу 6.

мена одной внутренней фотонной линии в диаграмме двумя не меняет ее зависимости от s (при заданном t)[1]). Другими словами, вклад диаграммы (134,9) в амплитуду рассеяния следует тому же асимптотическому закону (134,8), что и вклад основной диаграммы. Положение не изменится при добавлении в диаграмме еще и других параллельных внутренних фотонных линий, а также при введении поправок к внутренним электронным линиям.

Этот результат имеет общий характер: всякой диаграмме, которая может быть разрезана в t-канале или в u-канале на две части путем пересечения любого числа внутренних фотонных линий, отвечает вклад в амплитуду с асимптотикой соответственно $M_{fi} \propto s/t$ при $t = \text{const}$ или s/u при $u = \text{const}$ (*В. Г. Горшков, В. Н. Грибов, Л. Н. Липатов, Г. В. Фролов*, 1967; *H. Cheng, T. T. Wu*, 1969).

В качестве другого примера рассмотрим комптоновское рассеяние, описываемое двумя диаграммами (74,14). Эти диаграммы не допускают рассечения в t-канале, но вторая из них рассекается в u-канале по внутренней электронной линии; в обозначениях этого параграфа она имеет вид



(134,11)

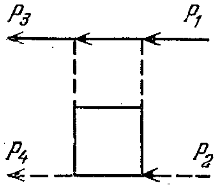
Это значит, что рассеяние сосредоточено в основном вблизи направления назад (как это уже было отмечено в конце § 86; см. (86,20)). Для нахождения асимптотики в этой области замечаем, что множитель G, отвечающий внутренней линии диаграммы (134,11), имеет порядок величины $1/\gamma(p_1 - p_4) \propto 1/\sqrt{|u|}$. Поэтому амплитуда рассеяния $M_{fi} \propto \alpha(s/|u|)^{1/2}$; в нее введен множитель α в соответствии с тем, что диаграмма (134,10) — второго порядка. Отсюда дифференциальное сечение: $d\sigma/du \propto \alpha^2/|u|s$. Интеграл этого выражения по $|u|$ определяется областью значений $|u| \ll s$. В результате полное сечение убывает с ростом энергии по закону $\sigma \propto \alpha^2/s$ (точнее, $\sigma \propto (\alpha^2/s)\ln(s/m^2)$; ср. (86,20))[2]).

---

[1]) Снова напомним, что речь идет только о степенных асимптотиках, и потому можно не обращать внимания на логарифмические расходимости при интегрировании. Мы вернемся к более подробному исследованию диаграмм вида (134,9) в § 137.

[2]) Точный вид зависимости сечения от $|u|$ или $|t|$ при их значениях $\lesssim m^2$, разумеется, не может быть выяснен на основании излагаемых соображений. Подразумевается, что интеграл по $|u|$ (или по $|t|$) сходится на значениях $\sim m^2$. Это действительно так для всех процессов, за исключением упругого рассеяния заряженных частиц.

Но для этого процесса радиационные поправки меняют асимптотику. Изменение возникает за счет диаграмм шестого порядка типа



(134,12)

Они допускают в t-канале рассечение по двум внутренним фотонным линиям и потому дают вклад в амплитуду с асимптотикой $M_{fi} \propto \alpha^3 s/t$; множитель α^3 отвечает шестому порядку диаграммы. При достаточно больших s эта часть амплитуды становится основной и тогда дифференциальное сечение

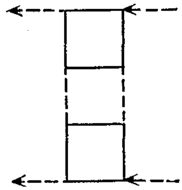
$$d\sigma/dt \propto \alpha^6/t^2.$$

Интеграл этого выражения по t определяется областью малых значений $|t| \sim m^2$, т. е. областью углов рассеяния $\theta \sim m/\sqrt{s}$ (обратим внимание на то, что рассеяние происходит теперь в основном в направлении вперед, а не назад). В результате полное сечение перестает убывать с энергией:

$$\sigma \propto \alpha^6/m^2 = \alpha^4/r_e^2. \qquad (134,13)$$

Убывающая часть сечения сравнивается с этой его постоянной частью при $\varepsilon = \sqrt{s} \propto m/\alpha^2$.

Аналогичная ситуация имеет место для рассеяния света на свете. В первом неисчезающем приближении оно описывается «квадратными» диаграммами (127,1), которые могут быть рассечены по двум внутренним электронным линиям. По 4-импульсу этих линий в диаграмме производится интегрирование, причем существенны импульсы $\sim \sqrt{s}$, и малые значения t (или u) ничем не выделены. Поэтому асимптотика этих диаграмм при любом $t = \text{const}$ (или $u = \text{const}$) дается законом (134,5): $M_{fi} = \text{const} \propto \alpha^2$. При этом полное сечение убывает с ростом энергии: $\sigma \propto \alpha^4/s$ (ср. (127,23)); углы, близкие к нулю или к π, здесь никак не выделены. Но в восьмом порядке появляются диаграммы, допускающие рассечение (в t- или в u-канале) по двум внутренним фотонным линиям, например



(134,14)

Эти диаграммы приводят к постоянной асимптотике сечения: $\sigma \propto \alpha^8/m^2$ при $\sqrt{s} \gg m/\alpha^2$ [1]).

Постоянная асимптотика для полного сечения — характерное свойство процессов рассеяния, диаграммы которых рассекаются (в t- или в u-канале) по внутренним фотонным линиям. Это свойство имеет место и в тех случаях, когда в конечном состоянии реакции возникает более двух частиц.

§ 135. Выделение дважды логарифмических членов в вершинном операторе

Поправки вида $(\alpha L)^n$ (L — большой логарифм) могут стать существенными, как уже было отмечено в конце § 133, лишь при фантастически высоких энергиях и потому имеют только теоретическое значение. Но в амплитудах реальных процессов рассеяния возникают также и гораздо бо́льшие поправки — вида $(\alpha L^2)^n$. Такие члены, содержащие по квадрату логарифма на каждую степень α, называют *дважды логарифмическими.*

Характерным параметром разложения в дважды логарифмических поправках является величина

$$\frac{\alpha}{\pi} \ln^2 \frac{\varepsilon^2}{m^2}, \tag{135,1}$$

где ε — фигурирующие в задаче энергии (скажем, суммарная энергия сталкивающихся частиц в системе их центра инерции). Условие применимости теории возмущений требует малости этой величины; оно нарушается при энергиях

$$\varepsilon \sim m \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) \sim 3 \cdot 10^4 m. \tag{135,2}$$

[1]) Сечение когерентного рассеяния фотона в поле ядра имеет постоянную асимптотику уже в первом неисчезающем приближении, описываемом «квадратными» диаграммами, два из концов которых — линии внешнего поля (см. (128,7)). В действительности, однако, эти диаграммы должны были бы изображаться в виде (134,12), где верхняя сплошная линия была бы линией ядра. Линии внешнего поля становятся тогда внутренними линиями диаграммы и происхождение постоянной асимптотики становится очевидным.