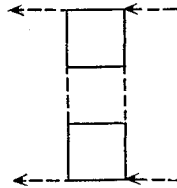


двум внутренним фотонным линиям, например



(134,14)

Эти диаграммы приводят к постоянной асимптотике сечения:  $\sigma \propto \alpha^3/m^2$  при  $\sqrt{s} \gg m(\alpha^2)^{1/2}$ .

Постоянная асимптотика для полного сечения — характерное свойство процессов рассеяния, диаграммы которых рассекаются (в  $t$ - или в  $u$ -канале) по внутренним фотонным линиям. Это свойство имеет место и в тех случаях, когда в конечном состоянии реакции возникает более двух частиц.

### § 135. Выделение дважды логарифмических членов в вершинном операторе

Поправки вида  $(\alpha L)^n$  ( $L$  — большой логарифм) могут стать существенными, как уже было отмечено в конце § 133, лишь при фантастически высоких энергиях и потому имеют только теоретическое значение. Но в амплитудах реальных процессов рассеяния возникают также и гораздо большие поправки — вида  $(\alpha L^2)^n$ . Такие члены, содержащие по квадрату логарифма на каждую степень  $\alpha$ , называют *дважды логарифмическими*.

Характерным параметром разложения в дважды логарифмических поправках является величина

$$\frac{\alpha}{\pi} \ln^2 \frac{\varepsilon^2}{m^2}, \quad (135,1)$$

где  $\varepsilon$  — фигурирующие в задаче энергии (скажем, суммарная энергия сталкивающихся частиц в системе их центра инерции). Условие применимости теории возмущений требует малости этой величины; оно нарушается при энергиях

$$\varepsilon \sim m \exp\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) \sim 3 \cdot 10^4 m. \quad (135,2)$$

<sup>1)</sup> Сечение когерентного рассеяния фотона в поле ядра имеет постоянную асимптотку уже в первом исчезающем приближении, описываемом «квадратными» диаграммами, два из концов которых — линии внешнего поля (см. (128,7)). В действительности, однако, эти диаграммы должны были бы изображаться в виде (134,12), где верхняя сплошная линия была бы линией ядра. Линии внешнего поля становятся тогда внутренними линиями диаграммы и происхождение постоянной асимптотики становится очевидным.

Поставим себе целью освободиться от этого условия и получить формулы, применимые при условии

$$\frac{\alpha}{\pi} \ln^2 \frac{\epsilon^2}{m^2} \leq 1. \quad (135,3)$$

Ясно, что это потребует суммирования бесконечного ряда поправок всех степеней  $(\alpha L^2)^n$ .

Дважды логарифмические поправки возникают в двух категориях случаев. К одной из них относятся процессы рассеяния на фиксированный конечный угол; их сечения (как мы видели в предыдущем параграфе) всегда падают в асимптотической области высоких энергий. Дважды логарифмические поправки в этих случаях тесно связаны с инфракрасной расходимостью. Сюда относится, в частности, упругое рассеяние электрона во внешнем кулоновом поле; в § 122 была найдена первая дважды логарифмическая поправка к его сечению. Полному определению этих поправок при условии (135,3) посвящены этот и следующий параграфы.

К другой категории относятся убывающие с ростом энергии сечения реакций при заданном квадрате передачи импульса, т. е. для углов, асимптотически приближающихся к нулю или к  $\pi$ ; как было показано в предыдущем параграфе, это имеет место для процессов, диаграммы которых не могут быть рассечены в  $t$ - или в  $u$ -канале по внутренним фотонным линиям. В этом случае дважды логарифмические поправки не связаны с инфракрасной расходимостью. В качестве такого рода примера в § 137 будет рассмотрено электрон-мюонное рассеяние назад, т. е. при  $u = \text{const}$ .

Отметим прежде всего, что при условии (135,3) однократно логарифмические поправки

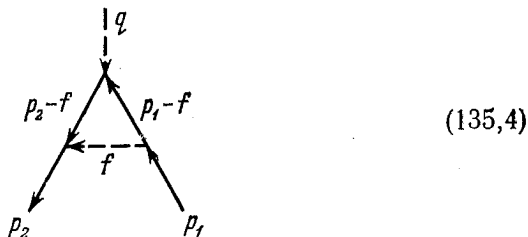
$$\sim \frac{\alpha}{\pi} \frac{\epsilon^2}{m^2} \leq \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \ll 1$$

и потому могут быть опущены. Поскольку в  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{D}$  дважды логарифмические поправки вообще отсутствуют, эти функции можно полагать теперь равными просто их невозмущенным значениям  $G$  и  $D$ .

Вычисление же вершинного оператора  $\Gamma$  требует суммирования дважды логарифмических членов, возникающих из бесконечного ряда диаграмм. Этой задаче посвящен следующий параграф. Предварительно же изложим метод, позволяющий выделять дважды логарифмические члены из отдельных интегралов Фейнмана до фактического проведения в них интегрирования по всем переменным (В. В. Судаков, 1956).

Рассмотрим поправку первого (по  $\alpha$ ) порядка к вершинному оператору, изображаемому диаграммой (117,1), которую удобно

изобразить здесь (переобозначив переменные) в виде



или, аналитически,

$$\Gamma^{\mu(1)}(p_2, p_1; q) = -\frac{ie^2}{4\pi^3} \int \frac{\gamma^\nu (\gamma p_2 - \gamma f + m) \gamma^\mu (\gamma p_1 - \gamma f + m) \gamma_\nu d^4 f}{[(p_2 - f)^2 - m^2 + i0] [(p_1 - f)^2 - m^2 + i0] [f^2 + i0]}. \quad (135,5)$$

Будем предполагать, что

$$|q^2| \gg p_1^2, p_2^2, m^2, \quad (135,6)$$

причем концы  $p_1, p_2$  могут быть как физическими, так и виртуальными. Из (135,6) следует, что

$$|p_1 p_2| \approx \frac{1}{2} |q^2| \gg p_1^2, p_2^2, m^2, \quad (135,7)$$

т. е. 4-векторы  $p_1, p_2$  имеют большие компоненты при малых квадратах — ситуация, возможная в силу псевдоевклидовости четырехмерной метрики. Дважды логарифмические члены возникают именно при условиях (135,6).

Мы увидим в дальнейшем, что при интегрировании по  $d^4 f$  будут существенны относительно малые значения  $f$ . Поэтому можно пренебречь  $f$  в числителе подинтегрального выражения, после чего  $\Gamma^{(1)}$  приобретает вид

$$\Gamma^{\mu(1)} = -\frac{ie^2}{4\pi^3} \gamma^\nu (\gamma p_2 + m) \gamma^\mu (\gamma p_1 + m) \gamma_\nu I_1, \quad (135,8)$$

где

$$I_1 = \int \frac{d^4 f}{[(p_2 - f)^2 - m^2 + i0] [(p_1 - f)^2 - m^2 + i0] [f^2 + i0]}. \quad (135,9)$$

Матричный множитель в (135,8) можно упростить, если учесть, что  $\Gamma$  всегда входит в диаграммы, по существу, умноженным на матрицы  $(\gamma p_2 + m)$  и  $(\gamma p_1 + m)$ :

$$(\gamma p_2 + m) \Gamma (\gamma p_1 + m). \quad (135,10)$$

Действительно, если линии  $p_1$  и  $p_2$  виртуальные, то эти множители происходят от  $G(p_1)$  и  $G(p_2)$ ; если же линии отвечают реальным электронам, то  $\Gamma$  умножается на  $\bar{u}_2$  и  $u_1$ , причем в

силу уравнений Дирака имеем

$$\bar{u}_2 = \bar{u}_2 \frac{\gamma p_2 + m}{2m}, \quad u_1 = \frac{\gamma p_1 + m}{2m} u_1.$$

Переставляя порядок матричных множителей и пренебрегая каждый раз, согласно условию (135,7), возникающими квадратами  $p_1^2$ ,  $p_2^2$ ,  $m^2$  по сравнению с  $(p_1 p_2)$ , получаем

$$(\gamma p_2 + m) \Gamma^{\mu(1)} (\gamma p_1 + m) \approx -\frac{ie^2}{\pi^3} (p_1 p_2) (\gamma p_2 + m) \gamma^\mu (\gamma p_1 + m) I_1.$$

Поэтому окончательно можно представить  $\Gamma^{(1)}$  в виде

$$\Gamma^{\mu(1)} = \frac{ie^2}{2\pi^3} \gamma^\mu t I_1, \quad (135,11)$$

где

$$t = q^2 \approx -2(p_1 p_2). \quad (135,12)$$

Отметим, что интеграл  $I_1$  сходится при больших  $f$  и потому уже не требует регуляризации.

Основной пункт дальнейших вычислений — введение новых, более удобных переменных интегрирования.

Разобьем  $f$  на составляющие, тангенциальные и нормальные по отношению к плоскости  $p_1, p_2$ :

$$f = up_1 + vp_2 + f_\perp \equiv f_\parallel + f_\perp, \quad (135,13)$$

$$f_\perp p_1 = f_\perp p_2 = 0. \quad (135,14)$$

В качестве же новых переменных выберем коэффициенты  $u, v$  и величину

$$\rho = -f_\perp^2. \quad (135,15)$$

Из условий (135,7) видно, что метрика в плоскости  $p_1, p_2$ , псевдоевклидова. Поэтому временную ось можно выбрать в этой плоскости, так что  $f_\perp$  — пространственноподобный 4-вектор и  $\rho > 0$ .

Обозначим временно индексами 0,  $x$  компоненты 4-векторов в плоскости  $p_1, p_2$ , а индексами  $y, z$  — компоненты в нормальной плоскости. Для преобразования элемента 4-объема  $d^4 f = d^2 f_\perp d^2 f_\parallel$  к новым переменным пишем

$$d^2 f_\perp = |f_\perp| |d|f_\perp| d\varphi = \frac{1}{2} d\rho d\varphi \rightarrow \pi d\rho$$

(имея в виду, что подинтегральное выражение в (135,9) не зависит от угла  $\varphi$ ). Далее,

$$d^2 f_\parallel = \left| \frac{\partial (f_0, f_x)}{\partial (u, v)} \right| du dv = |p_{10} p_{2x} - p_{20} p_{1x}| du dv \approx \frac{1}{2} |q^2| du dv.$$

Действительно, ввиду малости квадрата  $p_2^2$  имеем  $p_{2x}^2 \approx p_{20}^2$ , и поэтому

$$(p_{10}p_{2x} - p_{20}p_{1x})^2 \approx (p_{10}p_{20} - p_{2x}p_{1x})^2 = (p_1p_2)^2 = (q^2/2)^2.$$

Таким образом,

$$d^4f = \frac{1}{2} |t| du dv d^2f_{\perp} \rightarrow \frac{\pi}{2} |t| du dv d\rho. \quad (135,16)$$

Дальнейшие вычисления зависят от соотношения между величинами  $p_1^2$ ,  $p_2^2$ ,  $m^2$ . Рассмотрим два случая.

### *Случай виртуальных электронных линий*

Пусть импульсы  $p_1$ ,  $p_2$  отвечают виртуальным электронам, причем

$$|p_1^2|, |p_2^2| \gg m^2. \quad (135,17)$$

Мы увидим, что основной областью интегрирования, приводящей к дважды логарифмическому выражению, является в этом случае область, определяемая неравенствами

$$0 < \rho \ll |tu|, |tv|; \quad \left| \frac{p_1^2}{t} \right| \ll |v| \ll 1; \quad \left| \frac{p_2^2}{t} \right| \ll |u| \ll 1. \quad (135,18)$$

Соответственно этому в знаменателе подынтегрального выражения в (135,9) можно пренебречь  $m^2$ ,  $p_1^2$ ,  $p_2^2$ ,  $f^2$  по сравнению с  $(p_1f)$  или  $(p_2f)$ , так что

$$I_1 = \int \frac{d^4f}{2(p_2f) \cdot 2(p_1f)(f^2 + i0)}. \quad (135,19)$$

Для величин же  $(p_1f)$ ,  $(p_2f)$ ,  $f^2$  имеем

$$\begin{aligned} f^2 &= (up_1 + vp_2)^2 - \rho \approx -tuv - \rho, \\ 2(p_1f) &= 2p_1(up_1 + vp_2) \approx -tv, \\ 2(p_2f) &\approx -tu. \end{aligned}$$

Тогда

$$I_1 = -\frac{\pi}{2|t|} \int \frac{d\rho}{\rho + tuv - i0} \frac{du}{u} \frac{dv}{v}. \quad (135,20)$$

Согласно условиям (135,18) интегрирование по  $\rho$  производится в пределах от 0 до меньшего из  $|tv|$  или  $|tu|$  и дает

$$\int_0^{\min\{|tu|, |tv|\}} \frac{d\rho}{\rho + tuv - i0} = \ln \min \left\{ \frac{1}{|u|}, \frac{1}{|v|} \right\} + \begin{cases} i\pi, & tuv < 0, \\ 0, & tuv > 0. \end{cases} \quad (135,21)$$

Логарифмическое же интегрирование по  $v$  производится в пределах от  $-1$  до  $-|p_1^2/t|$  и от  $|p_1^2 t|$  до  $1$  (и аналогично по  $u$ ). При подстановке (135,21) в (135,20) интеграл по  $du dv$  от первого члена обращается в нуль ввиду нечетности подынтегральной функции. Интегрирование же второго члена производится по интервалам значений  $u$  и  $v$  одинакового (при  $t < 0$ ) или различного (при  $t > 0$ ) знака. В обоих случаях области  $v > 0$  и  $v < 0$  дают (после интегрирования по  $u$ ) одинаковый вклад, и в результате находим (знак интеграла совпадает со знаком  $t$ ):

$$I_1 = \frac{i\pi^2}{2t} 2 \int_{\left|\frac{p_2^2}{t}\right|}^1 \frac{du}{u} \int_{\left|\frac{p_1^2}{t}\right|}^1 \frac{dv}{v} = \frac{i\pi^2}{t} \ln \left| \frac{t}{p_1^2} \right| \ln \left| \frac{t}{p_2^2} \right|. \quad (135,22)$$

Наконец, подставив значение  $I_1$  в (135,11), получим окончательно

$$\Gamma^{\mu(1)}(p_2, p_1; q) = -\frac{\alpha}{2\pi} \gamma^\mu \ln \left| \frac{q^2}{p_1^2} \right| \ln \left| \frac{q^2}{p_2^2} \right|, \quad (135,23)$$

$$|q^2| \gg |p_1^2|, |p_2^2| \gg m^2.$$

#### Случай физических электронных концов

Пусть теперь импульсы  $p_1, p_2$  отвечают реальным электронам, так что

$$p_1^2 = p_2^2 = m^2. \quad (135,24)$$

В этом случае существенна область интегрирования

$$0 < \rho \ll |tu|, |tv|; \quad 0 < |v|, |u| \ll 1. \quad (135,25)$$

Поскольку  $p_1^2 - m^2 = p_2^2 - m^2 = 0$ , то пренебрегая  $p_1^2$  и  $p_2^2$  по сравнению с  $(p_1 f)$  или  $(p_2 f)$ , снова приводим интеграл (135,9) к виду (135,19). Для устранения появляющейся в этом случае инфракрасной расходимости надо, однако, ввести еще в фотонный пропагатор конечную массу фотона  $\lambda \ll m$  (ср. § 117):

$$I_1 = \int \frac{d^4 f}{2(p_1 f) \cdot 2(p_2 f) (f^2 - \lambda^2 + i0)}. \quad (135,26)$$

Далее, имеем

$$f^2 \approx -tuv - \rho, \quad 2(p_1 f) \approx -tv + 2m^2 u, \quad 2(p_2 f) \approx -tu + 2m^2 v,$$

так что

$$I_1 = -\frac{\pi}{2|t|} \int \frac{d\rho}{\rho + tuv + \lambda^2 - i0} \frac{du}{u - \tau v} \frac{dv}{v - \tau u}, \quad \tau = 2m^2/t \ll 1. \quad (135,27)$$

После интегрирования по  $\rho$  (аналогичного (135,21)) находим

$$I_1 = -\frac{i\pi^2}{2|t|} \iint \frac{du}{u-\tau v} \frac{dv}{v-\tau u},$$

причем интегрирование производится при условии  $tuv + \lambda^2 < 0$ . Области  $v > 0$  и  $v < 0$  снова дают одинаковый вклад, и после интегрирования по  $u$  находим

$$I_1 = \frac{i\pi^2}{t} \int_0^1 dv \int_{\delta/v}^1 \frac{du}{(u-\tau v)(v-\tau u)} = \frac{i\pi^2}{t} \int_0^1 \ln \left| \frac{\tau\delta - v^2}{(\delta - \tau v^2)(\tau - v)} \right| \frac{dv}{v}, \quad (135,28)$$

где  $\delta = \lambda^2/t$ ,  $|\delta| \ll |\tau|$  и учтено, что  $|\tau| \ll 1$ .

В интеграле (135,28) три области значений  $v$  приводят к дважды логарифмическим выражениям:

$$I) |\tau| \ll v \ll 1, \quad II) \sqrt{\delta/\tau} \ll v \ll |\tau|, \quad III) \sqrt{\tau\delta} \ll v \ll \sqrt{\delta/\tau}.$$

(Для определенности считаем, что  $\sqrt{\delta/\tau} \ll |\tau|$ . Ответ от этого предположения не зависит.) Делая в каждой области соответствующие пренебрежения, получаем

$$I_1 = \frac{i\pi^2}{2t} \left( \ln^2 \frac{|t|}{m^2} + 4 \ln \frac{|t|}{m^2} \ln \frac{m}{\lambda} \right). \quad (135,29)$$

Наконец, подставив в (135,11), найдем окончательно

$$\Gamma^{\mu(1)}(p_2, p_1; q) = -\frac{\alpha}{4\pi} \gamma^\mu \left( \ln^2 \frac{|q^2|}{m^2} + 4 \ln \frac{|q^2|}{m^2} \ln \frac{m}{\lambda} \right), \quad (135,30)$$

$$|q^2| \gg p_1^2 = p_2^2 = m^2,$$

что совпадает с (117,21).

### § 136. Дважды логарифмическая асимптотика вершинного оператора

Когда вычисленные в предыдущем параграфе поправки  $\Gamma^{(1)}$  достигают значений порядка единицы, вычисление вершинного оператора требует суммирования всей бесконечной последовательности дважды логарифмических членов всех степеней по  $\alpha$ . Решение этой задачи оказывается возможным благодаря тому, что такие члены возникают только от диаграмм определенного типа, а вклады диаграмм различного порядка оказываются связанными друг с другом простыми соотношениями.