После интегрирования по ρ (аналогичного (135,21)) находим

$$I_1 = -\frac{i\pi^2}{2|t|}\iint \frac{du}{u-\tau v}\,\frac{dv}{v-\tau u},$$

причем интегрирование производится при условии $tuv + \lambda^2 < 0$. Области $v > 0$ и $v < 0$ снова дают одинаковый вклад, и после интегрирования по u находим

$$I_1 = \frac{i\pi^2}{t}\int_0^1 dv \int_{\delta/v}^1 \frac{du}{(u-\tau v)(v-\tau u)} = \frac{i\pi^2}{t}\int_0^1 \ln\left|\frac{\tau\delta - v^2}{(\delta - \tau v^2)(\tau - v)}\right|\frac{dv}{v}, \tag{135,28}$$

где $\delta = \lambda^2/t$, $|\delta| \ll |\tau|$ и учтено, что $|\tau| \ll 1$.

В интеграле (135,28) три области значений v приводят к дважды логарифмическим выражениям:

$$\text{I)}\ |\tau| \ll v \ll 1, \quad \text{II)}\ \sqrt{\delta/\tau} \ll v \ll |\tau|, \quad \text{III)}\ \sqrt{\tau\delta} \ll v \ll \sqrt{\delta/\tau}.$$

(Для определенности считаем, что $\sqrt{\delta/\tau} \ll |\tau|$. Ответ от этого предположения не зависит.) Делая в каждой области соответствующие пренебрежения, получаем

$$I_1 = \frac{i\pi^2}{2t}\left(\ln^2\frac{|t|}{m^2} + 4\ln\frac{|t|}{m^2}\ln\frac{m}{\lambda}\right). \tag{135,29}$$

Наконец, подставив в (135,11), найдем окончательно

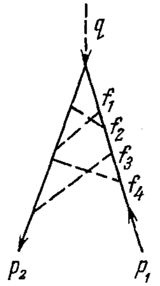
$$\Gamma^{\mu(1)}(p_2, p_1; q) = -\frac{\alpha}{4\pi}\gamma^\mu\left(\ln^2\frac{|q^2|}{m^2} + 4\ln\frac{|q^2|}{m^2}\ln\frac{m}{\lambda}\right), \tag{135,30}$$
$$|q^2| \gg p_1^2 = p_2^2 = m^2,$$

что совпадает с (117,21).

§ 136. Дважды логарифмическая асимптотика вершинного оператора

Когда вычисленные в предыдущем параграфе поправки $\Gamma^{(1)}$ достигают значений порядка единицы, вычисление вершинного оператора требует суммирования всей бесконечной последовательности дважды логарифмических членов всех степеней по α. Решение этой задачи оказывается возможным благодаря тому, что такие члены возникают только от диаграмм определенного типа, а вклады диаграмм различного порядка оказываются связанными друг с другом простыми соотношениями.

Именно, дважды логарифмические члены возникают, как мы убедимся ниже, от всех диаграмм вида



(136,1)

и т. п., в которых каждая из фотонных линий соединяет правую и левую электронные линии; при этом они могут любым образом пересекаться друг с другом.

Перенумеруем фотонные импульсы f_1, f_2, ... в порядке следования, скажем, правых концов их линий. Тогда различные диаграммы одинакового порядка будут отличаться друг от друга перестановкой левых концов фотонных линий. В каждом интеграле Фейнмана производим пренебрежения в числителе и знаменателе, подобные тем, которые были сделаны в интеграле (135,5); после этого числитель преобразуем тем же способом, что и при выводе (135,11). В результате сумма всех диаграмм с n фотонными линиями, составляющая член $\sim\alpha^n$ в Γ, представится в виде

$$\Gamma^{\mu(n)} = \gamma^\mu \left(\frac{i\alpha}{2\pi^3} t\right)^n I_n, \tag{136,2}$$

$$I_n = \\ = \sum_{\text{пер }2} \int \frac{d^4 f_1 \dots d^4 f_n}{2(p_1 f_1)\cdot 2(p_1 f_1 + p_1 f_2)\dots 2(p_1 f_1 + \dots + p_1 f_n)\, 2(p_2 f_1)\dots 2(p_2 f_1 + \dots + p_2 f_n)\, f_1^2 f_2^2 \dots f_n^2}, \tag{136,3}$$

где сумма берется по всем перестановкам индексов у импульсов f_k в произведениях $(p_2 f_k)$ (члены $i0$ и λ^2 в знаменателях для краткости не выписываем).

Очевидно, что если переставить в сумме (136,3) каким-либо образом индексы у множителей f_k в произведениях $(p_1 f_k)$, то это сведется лишь к переобозначению импульсов и потому не изменит значения I_n. Поэтому можно распространить суммирование в (136,3) по всем перестановкам множителей f_k как в произведениях $(p_2 f_k)$, так и в $(p_1 f_k)$, разделив после этого результат на $n!$.

Воспользуемся теперь важной формулой

$$\sum_{\text{пер}} \frac{1}{a_1(a_1+a_2)\dots(a_1+a_2+\dots+a_n)} = \frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\dots\frac{1}{a_n}, \tag{136,4}$$

где сумма берется по перестановкам индексов 1, 2, ..., n[1]). Двукратное применение этой формулы сводит сумму интегралов к произведению n одинаковых интегралов вида (135,19) (или (135,26)), так что

$$I_n = I_1^n/n!. \tag{136,5}$$

Подставив это в (136,2) и просуммировав $\Gamma^{(n)}$ по всем $n = 0, 1, 2, \ldots$, получим окончательно

$$\Gamma^\mu(p_2, p_1; q) = \gamma^\mu \exp\left(\frac{ie^2}{2\pi^3} t I_1\right). \tag{136,6}$$

В частности, подставив сюда I_1 из (135,22), получим дважды логарифмическую асимптотику вершинного оператора с виртуальными электронными концами

$$\Gamma^\mu(p_2, p_1; q) = \gamma^\mu \exp\left\{-\frac{\alpha}{2\pi} \ln\left|\frac{q^2}{p_1^2}\right| \ln\left|\frac{q^2}{p_2^2}\right|\right\}, \tag{136,7}$$

$$|q^2| \gg |p_1^2|, \quad |p_2^2| \gg m^2$$

(*В. В. Судаков*, 1956).

Подставив же I_1 из (135,29), найдем асимптотику для вершинного оператора в случае реальных электронных концов:

$$\Gamma^\mu(p_2, p_1; q) = \gamma^\mu \exp\left\{-\frac{\alpha}{4\pi}\left(\ln^2\frac{|q^2|}{m^2} + 4\ln\frac{|q^2|}{m^2}\ln\frac{m}{\lambda}\right)\right\}, \tag{136,8}$$

$$|q^2| \gg p_1^2 = p_2^2 = m^2.$$

Множитель, отличающий Γ^μ от его невозмущенного значения γ^μ, определяет также и отличие амплитуды рассеяния электрона во внешнем поле от ее борновского значения. Поэтому сечение рассеяния

$$d\sigma = d\sigma_{\text{Б}} \exp\left\{-\frac{\alpha}{2\pi}\left(\ln^2\frac{|q^2|}{m^2} + 4\ln\frac{|q^2|}{m^2}\ln\frac{m}{\lambda}\right)\right\}. \tag{136,9}$$

Для устранения инфракрасной расходимости надо, однако, еще умножить это выражение на сумму вероятностей испускания различного числа мягких фотонов с энергией, не превышающей некоторого малого $\omega_{\max}$, т. е. на величину (см. (122,2))

$$1 + \int_0^{\omega_{\max}} dw_\omega + \frac{1}{2!}\int_0^{\omega_{\max}} dw_{\omega_1}\int_0^{\omega_{\max}} dw_{\omega_2} + \ldots = \exp\left\{\int_0^{\omega_{\max}} dw_\omega\right\}. \tag{136,10}$$

---

[1]) При $n = 2$ эта формула очевидна, а ее обобщение легко достигается индукцией от n к $n+1$.

Интеграл в экспоненте берем из (120,14) (выражение, стоящее множителем при $d\sigma_{\text{упр}}$) и в результате находим окончательно следующую асимптотическую формулу для сечения рассеяния электрона с энергией ε при большой передаче импульса:

$$d\sigma = d\sigma_{\text{Б}} \exp\left\{-\frac{2\alpha}{\pi}\ln\frac{|q^2|}{m^2}\ln\frac{\varepsilon}{\omega_{\max}}\right\}, \qquad (136{,}11)$$

$$|q^2| \gg m^2, \quad \frac{\alpha}{2\pi}\ln^2\frac{\varepsilon}{m} \sim 1$$

(*А. А. Абрикосов*, 1956). Первый (по α) член разложения этого выражения совпадает, естественно, с формулой (122,12).

Обратим внимание на то обстоятельство, что если положить $\omega_{\max} \sim \varepsilon$, то один из логарифмов в (136,11) становится порядка единицы; другими словами, дважды логарифмические поправки сокращаются, если рассматривать сечение с одновременным испусканием фотонов любых энергий[1]). В принятом приближении экспоненциальный множитель в (136,11) обращается тогда в единицу, так что сечение оказывается совпадающим с борновским — в соответствии с общим утверждением в конце § 98.

§ 137. Дважды логарифмическая асимптотика амплитуды рассеяния электрона на мюоне

В качестве примера другого рода рассмотрим рассеяние электрона на отрицательном мюоне, причем ограничимся случаем рассеяния строго назад, т. е. на угол $\theta = \pi$ (*В. Г. Горшков, В. Н. Грибов, Л. Н. Липатов, Г. В. Фролов*, 1967). Этот процесс является простейшим с двух точек зрения. Во-первых, ввиду нетождественности обеих частиц отсутствуют обменные диаграммы. Во-вторых, при рассеянии назад сильно подавлено излучение мягких фотонов, в результате чего не возникает инфракрасной расходимости. Действительно, согласно (98,8) сечение испускания мягких фотонов

$$d\sigma = \alpha\left[\left(\frac{\mathbf{v}'_e}{1-\mathbf{v}'_e\mathbf{n}} + \frac{\mathbf{v}'_\mu}{1-\mathbf{v}'_\mu\mathbf{n}} - \frac{\mathbf{v}_e}{1-\mathbf{v}_e\mathbf{n}} - \frac{\mathbf{v}_\mu}{1-\mathbf{v}_\mu\mathbf{n}}\right)\mathbf{n}\right]^2 \frac{d\omega\, do_{\mathbf{n}}}{4\pi^2\omega}\, d\sigma_{\text{упр}}, \qquad (137{,}1)$$

где $\mathbf{v}_e$, $\mathbf{v}_\mu$ и $\mathbf{v}'_e$, $\mathbf{v}'_\mu$ — скорости частиц до и после столкновения. Но в ультрарелятивистском случае равенство импульсов равнозначно равенству скоростей, и с этой точностью имеем в системе

[1]) При рассеянии на конечный угол сформулированное в § 98 условие мягкости фотона требует только, чтобы было $\omega_{\max} \ll \varepsilon$, что позволяет с логарифмической точностью применять полученные здесь формулы и при $\omega_{\max} \sim \varepsilon$.