Интеграл в экспоненте берем из (120,14) (выражение, стоящее множителем при $d\sigma_{\text{упр}}$) и в результате находим окончательно следующую асимптотическую формулу для сечения рассеяния электрона с энергией ε при большой передаче импульса:

$$d\sigma = d\sigma_{\text{Б}} \exp\left\{-\frac{2\alpha}{\pi} \ln\frac{|q^2|}{m^2} \ln\frac{\varepsilon}{\omega_{\max}}\right\}, \tag{136,11}$$

$$|q^2| \gg m^2, \quad \frac{\alpha}{2\pi} \ln^2\frac{\varepsilon}{m} \sim 1$$

(*А. А. Абрикосов*, 1956). Первый (по α) член разложения этого выражения совпадает, естественно, с формулой (122,12).

Обратим внимание на то обстоятельство, что если положить $\omega_{\max} \sim \varepsilon$, то один из логарифмов в (136,11) становится порядка единицы; другими словами, дважды логарифмические поправки сокращаются, если рассматривать сечение с одновременным испусканием фотонов любых энергий[1]). В принятом приближении экспоненциальный множитель в (136,11) обращается тогда в единицу, так что сечение оказывается совпадающим с борновским — в соответствии с общим утверждением в конце § 98.

§ 137. Дважды логарифмическая асимптотика амплитуды рассеяния электрона на мюоне

В качестве примера другого рода рассмотрим рассеяние электрона на отрицательном мюоне, причем ограничимся случаем рассеяния строго назад, т. е. на угол $\theta = \pi$ (*В. Г. Горшков, В. Н. Грибов, Л. Н. Липатов, Г. В. Фролов*, 1967). Этот процесс является простейшим с двух точек зрения. Во-первых, ввиду нетождественности обеих частиц отсутствуют обменные диаграммы. Во-вторых, при рассеянии назад сильно подавлено излучение мягких фотонов, в результате чего не возникает инфракрасной расходимости. Действительно, согласно (98,8) сечение испускания мягких фотонов

$$d\sigma = \alpha\left[\left(\frac{\mathbf{v}'_e}{1-\mathbf{v}'_e\mathbf{n}} + \frac{\mathbf{v}'_\mu}{1-\mathbf{v}'_\mu\mathbf{n}} - \frac{\mathbf{v}_e}{1-\mathbf{v}_e\mathbf{n}} - \frac{\mathbf{v}_\mu}{1-\mathbf{v}_\mu\mathbf{n}}\right)\mathbf{n}\right]^2 \frac{d\omega\, do_{\mathbf{n}}}{4\pi^2\omega}\, d\sigma_{\text{упр}}, \tag{137,1}$$

где $\mathbf{v}_e$, $\mathbf{v}_\mu$ и $\mathbf{v}'_e$, $\mathbf{v}'_\mu$ — скорости частиц до и после столкновения. Но в ультрарелятивистском случае равенство импульсов равнозначно равенству скоростей, и с этой точностью имеем в системе

[1]) При рассеянии на конечный угол сформулированное в § 98 условие мягкости фотона требует только, чтобы было $\omega_{\max} \ll \varepsilon$, что позволяет с логарифмической точностью применять полученные здесь формулы и при $\omega_{\max} \sim \varepsilon$.

центра инерции при рассеянии назад $\mathbf{v}_e = -\mathbf{v}_\mu = -\mathbf{v}'_e = \mathbf{v}'_\mu$. В результате выражение (137,1) обращается в нуль.

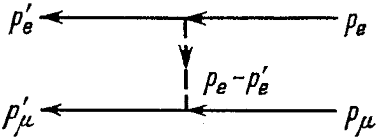
Если рассматриваемый процесс рассеяния отвечает s-каналу реакции, то в t-канале он переходит в процесс превращения электрон-позитронной пары в пару $\mu^+\mu^-$. В этом канале условие $\theta = \pi$ означает, что совпадают направления движения e^- и μ^- (и e^+ и μ^+). Подавление тормозного излучения в этом канале имеет особенно наглядный смысл, так как направление движения заряда каждого знака вообще не меняется.

Взаимное сокращение главных членов в сечении излучения приводит к тому, что в его асимптотике не возникают дважды логарифмические поправки. Соответственно не возникает (с той же дважды логарифмической точностью) инфракрасной расходимости и при интегрировании по импульсам виртуальных фотонов в амплитуде рассеяния.

Если описывать процесс с помощью инвариантных переменных $s = (p_e + p_\mu)^2$, $t = (p_e - p'_e)^2$, $u = (p_e - p'_\mu)^2$, то рассеянию назад в ультрарелятивистском случае будут отвечать значения

$$s = -t \gg m_\mu^2, \qquad u = 0. \tag{137,2}$$

В первом (по α) приближении теории возмущений рассеяние электрона на мюоне описывается диаграммой



(137,3)

Соответствующая амплитуда:

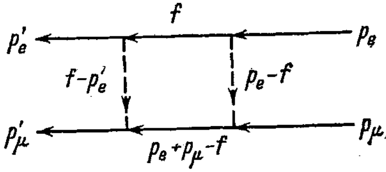
$$M_{fi}^{(1)} = \frac{4\pi\alpha}{t} \left(\bar{u}^{(\mu)\prime}\gamma^\nu u^{(\mu)}\right)\left(\bar{u}^{(e)\prime}\gamma_\nu u^{(e)}\right). \tag{137,4}$$

Переход к предельному случаю (137,2) в этом выражении осуществляется заменой матричного 4-вектора γ^ν его «проекцией» $\gamma^\nu_\perp$ на плоскость, нормальную плоскости p_e, p'_e (или, что то же, плоскости p_μ, p'_μ, поскольку при ультрарелятивистском рассеянии назад $p_e \approx p'_\mu$, $p'_e \approx p_\mu$). Действительно, параллельными плоскости p_e, p'_e составляющими являются матрицы

$$\frac{1}{\sqrt{s}}(\gamma p_e + \gamma p'_e), \qquad \frac{1}{\sqrt{s}}(\gamma p_e - \gamma p'_e)$$

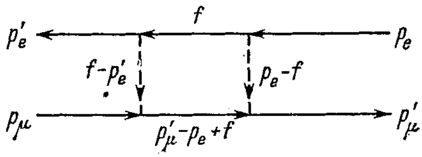
(первая совпадает с γ^0, а вторая равна $\mathbf{n}_e\boldsymbol{\gamma}$, где $\mathbf{n}_e$ — орт направления $\mathbf{p}_e$). Используя уравнения Дирака для биспиноров $u^{(e)}$ и $u^{(\mu)}$, находим, что $\left(\bar{u}^{(\mu)\prime}\gamma^\nu_\parallel u^{(\mu)}\right)\left(\bar{u}^{(e)\prime}\gamma_{\nu\parallel} u^{(e)}\right) \sim 1/s$, и потому эти члены могут быть опущены.

В следующем приближении добавляются диаграмма



(137,5)

и диаграмма с «перекрещенными» фотонными линиями, которую удобно изобразить в виде, отличающемся от (137,5) лишь направлением одной из сплошных линий:



(137,6)

Исследование соответствующих интегралов показывает, что в обеих диаграммах возникают дважды логарифмические вклады от областей мягких виртуальных фотонов: $|(f-p_e)^2| \ll m$ или $|(f-p_e')^2| \ll m_e^2$. Эти вклады связаны с инфракрасными расходимостями интегралов и, согласно сказанному выше, в данном случае заведомо должны взаимно сокращаться. В диаграмме (137,6) имеется, однако, дважды логарифмический вклад еще и от области больших импульсов: $|f^2| \gg m_\mu^2$. Именно этот вклад и должен быть вычислен.

Диаграмме (137,6) отвечает интеграл

$$M_{fi}^{(2)} = -\frac{i\alpha^2}{\pi^2}\int \frac{\left(\bar{u}^{(e)\prime}\gamma^{\nu}(\gamma f + m_e)\gamma_{\lambda}u^{(e)}\right)\left(\bar{u}^{(\mu)\prime}\gamma^{\lambda}(\gamma f + m_\mu)\gamma_{\nu}u^{(\mu)}\right)}{(p_e'-f)^2(f^2-m_e^2)(f^2-m_\mu^2)(p_e-f)^2}\,d^4f, \tag{137,7}$$

где уже учтено, что $p_e \approx p_\mu'$. Положим снова

$$f = up_e + vp_e' + f_\perp \tag{137,8}$$

(ср. (135,13)). Дважды логарифмический вклад возникает от области, определяемой неравенствами

$$|su|,\ |sv| \gg \rho \gg m_\mu^2;\qquad m_\mu^2/s \ll |u|,\ |v| \ll 1, \tag{137,9}$$

где $\rho = -f_\perp^2$. В (137,8) 4-вектор $f_\perp$ определен так, что $f_\perp p_e = f_\perp p_e' = 0$; в данном случае (рассеяние назад) отсюда следует, что в системе центра инерции $f_\perp^0 = 0$, так что $\rho = \mathbf{f}_\perp^2$.

В числителе интеграла (137,7) можно пренебречь m_e, m_μ, а также всеми членами с u или v; множители u или v в числителе сокращают соответствующие полюсы в знаменателе (см. ниже), в результате чего не возникают требуемые квадраты логарифмов. Замечая, что $(p'_e-f)^2 \approx tu \approx -su$, $(p_e-f)^2 \approx -sv$, $f^2 \approx \approx suv-\rho$, и преобразуя элемент интегрирования d^4f согласно (135,16), переписываем интеграл (137,7) в виде

$$M_{fi}^{(2)} = -\frac{i\alpha^2}{2\pi^2}\int \frac{\left(\bar{u}^{(e)\prime}\gamma^\nu(\gamma f_\perp)\gamma_\lambda u^{(e)}\right)\left(\bar{u}^{(\mu)\prime}\gamma^\lambda(\gamma f_\perp)\gamma_\nu u^{(\mu)}\right)}{su\cdot sv\,(suv-\rho+i0)^2}\, s\,du\,dv\,d^2f_\perp .$$

Числитель подынтегрального выражения преобразуется далее путем усреднения по направлению $\mathbf{f}_\perp$ и замены (по тем же причинам, что и в (137,4)) γ^ν, γ^λ на $\gamma^\nu_\perp$, $\gamma^\mu_\perp$. После простых преобразований получим

$$M_{fi}^{(2)} = M_{fi}^{(1)}J^{(1)}, \quad J^{(1)} = -i\frac{\alpha}{4\pi^2}\int\frac{\rho\,du\,dv\,d\rho}{uv\,(suv-\rho+i0)^2}. \tag{137,10}$$

Наконец, заменив в числителе тождественно $\rho \equiv (\rho - suv) + suv$, можно опустить второй член, который сократил бы простые полюсы и тем самым не дал бы дважды логарифмического вклада. Таким образом,

$$J^{(1)} = -\frac{i\alpha}{4\pi^2}\int\frac{du\,dv\,d\rho}{uv\,(\rho-suv-i0)}. \tag{137,11}$$

Этот интеграл по форме совпадает с (135,20), поэтому интегрирование по ρ производится тем же способом. Однако поскольку теперь $\rho \gg m_\mu^2$, возникает условие $suv \gg m_\mu^2$ (вместо $suv > 0$). В результате находим

$$J^{(1)} = \frac{\alpha}{2\pi}\int\frac{du\,dv}{uv}, \tag{137,12}$$

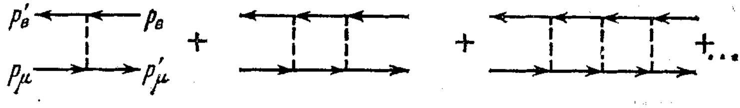
причем область интегрирования ограничена неравенствами

$$m_\mu^2/s < u, \quad v < 1, \qquad suv > m_\mu^2$$

(при вычислении с логарифмической точностью сильные неравенства $\gg$ заменяются простыми неравенствами $>$). Прямое вычисление дает

$$J^{(1)} = \frac{\alpha}{4\pi}\ln^2\frac{s}{m_\mu^2}. \tag{137,13}$$

В более высоких приближениях теории возмущений интересующие нас вклады $\sim\alpha^n\ln^{2n}s$ получаются от аналогичных (137,6) диаграмм «лестничного» типа с бо́льшим числом «перекладин». Поэтому полная дважды логарифмическая асимптотика амплитуды рассеяния дается бесконечной суммой

$iM_{fi} =$ 

(137,14)

Для установления общего вида членов этой суммы рассмотрим еще диаграмму третьего приближения (третий член ряда (137,14)). Соответствующий ей интеграл можно привести к виду

$$M_{fi}^{(3)} = M_{fi}^{(1)} J^{(2)}, \quad J^{(2)} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int \frac{du_1\, dv_1\, du_2\, dv_2}{u_1 v_1 (u_1 + u_2)(v_1 + v_2)} \qquad (137,15)$$

с областью интегрирования

$$m_\mu^2/s < u_{1,2},\ v_{1,2} < 1, \quad su_1v_1,\ su_2v_2 > m_\mu^2.$$

Дважды логарифмическую часть этого интеграла можно выделить, наложив на переменные интегрирования еще условия

$$v_2 \gg v_1, \quad u_2 \gg u_1. \qquad (137,16)$$

Тогда

$$J^{(2)} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int \frac{du_1\, dv_1\, du_2\, dv_2}{u_1 u_2 v_1 v_2} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int d\xi_1\, d\eta_1\, d\xi_2\, d\eta_2,$$

где $\xi_i = \ln(su_i/m_\mu^2)$, $\eta_i = -\ln v_i$, а область интегрирования определена неравенствами

$$\xi_1 > \eta_1; \quad \xi_2 > \eta_2; \quad \sigma > \xi_2,\ \eta_2 > 0; \quad \sigma = \ln(s/m_\mu^2).$$

Аналогичным образом n-й член ряда может быть представлен в виде $M_{fi}^{(n)} = M_{fi}^{(1)} J^{(n)}$, где

$$J^{(n)}(\sigma) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \int d\xi_1\, d\eta_1 \ldots d\xi_n\, d\eta_n, \qquad (137,17)$$

с областью интегрирования

$$\xi_i > \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad \sigma > \xi_n, \ \eta_n > 0. \qquad (137,18)$$

Полная амплитуда рассеяния равна

$$M_{fi} = M_{fi}^{(1)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} J^{(n)}(\sigma)\right]. \qquad (137,19)$$

Для вычисления этой суммы введем теперь вспомогательные функции $A^{(n)}(\xi, \eta)$, которые даются теми же интегралами (137,17), но с областями интегрирования

$$\xi_i > \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad \xi > \xi_n > 0, \quad \eta > \eta_n > 0 \qquad (137,20)$$

(различные пределы интегрирования по ξ_n и η_n вместо одинаковых в (137,18)). Очевидно, что $M_{fi}=M_{fi}^{(1)}A(\sigma, \sigma)$, где

$$A(\xi, \eta)=\sum_{n=0}^{\infty} A^{(n)}(\xi, \eta), \quad A^{(0)}=1. \tag{137,21}$$

Из определения функций $A^{(n)}(\xi, \eta)$ видно, что они удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$A^{(n)}(\xi, \eta)=\frac{\alpha}{2\pi}\int d\xi_1\, d\eta_1 A^{(n-1)}(\xi_1, \eta_1),$$

а просуммировав эти равенства по n (от 1 до ∞), найдем интегральное уравнение, определяющее функцию $A(\xi, \eta)$:

$$A(\xi, \eta)=1+\frac{\alpha}{2\pi}\int A(\xi_1, \eta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1, \tag{137,22}$$
$$\xi_1>\eta_1, \quad \xi>\xi_1>0, \quad \eta>\eta_1>0.$$

Для дальнейшего будет достаточно рассмотреть функцию $A(\xi, \eta)$ в области $\xi>\eta$. Тогда уравнение (137,22) можно записать в виде

$$A(\xi, \eta)=1+\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{\eta}\int_{\eta_1}^{\xi} A(\xi_1, \eta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1. \tag{137,23}$$

Дифференцируя это равенство по η, имеем

$$\frac{\partial A(\xi, \eta)}{\partial \eta}=\frac{\alpha}{2\pi}\int_{\eta}^{\xi} A(\xi_1, \eta)\, d\xi_1, \tag{137,24}$$

а дифференцируя затем еще и по ξ, находим для $A(\xi, \eta)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \eta\, \partial \xi}-\frac{\alpha}{2\pi} A=0. \tag{137,25}$$

Это уравнение должно быть решено с граничными условиями

$$A(\xi, 0)=1, \quad \left.\frac{\partial A}{\partial \eta}\right|_{\xi=\eta}=0, \tag{137,26}$$

непосредственно следующими из (137,23—24).

Решение можно получить с помощью преобразования Лапласа по переменной ξ:

$$A(\xi, \eta)=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{p\xi} Q(p, \eta)\, dp, \tag{137,27}$$

где контур C в плоскости комплексного p — замкнутая кривая, охватывающая точку $p=0$. Подставив (137,27) в уравнение

(137,25) и приравняв нулю подынтегральное выражение, получим

$$p\frac{\partial Q}{\partial\eta}=\frac{\alpha}{2\pi}Q,\quad Q=\varphi(p)\,e^{\frac{\alpha\eta}{2\pi p}},$$

где $\varphi(p)$ — произвольная функция. Первое из граничных условий (137,26) дает теперь $\varphi(p)=1/p+\psi(p)$, где $\psi(p)$ — аналитическая функция, не имеющая особенностей внутри контура C. Второму же условию (137,26) можно удовлетворить, положив $\psi(p)=-2\pi p/\alpha$; действительно, тогда

$$\left.\frac{\partial A}{\partial\eta}\right|_{\xi=\eta}=-\frac{1}{2\pi i\xi}\int\limits_C\frac{d}{dp}\,e^{\xi\left(p+\frac{\alpha}{2\pi p}\right)}\,dp=0.$$

Собрав полученные выражения и положив $\xi=\eta=\sigma$, найдем

$$A(\sigma,\sigma)=-\frac{1}{2\pi i}\frac{2\pi}{\alpha\sigma}\int\limits_C p\frac{d}{dp}\exp\left[\sigma\left(p+\frac{\alpha}{2\pi p}\right)\right]dp.$$

Наконец, проинтегрировав по частям и воспользовавшись известной формулой

$$I_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\exp\left[\frac{z}{2}\left(p+\frac{1}{p}\right)\right]dp$$

($I_1(z)=-iJ_1(iz)$ — функция Бесселя мнимого аргумента), получим окончательно для амплитуды рассеяния

$$M_{fi}=M_{fi}^{(1)}\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\sigma^2}}\,I_1\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\,\sigma\right).\tag{137,28}$$

Сечение же рассеяния (на угол $\theta=\pi$) соответственно равно

$$d\sigma=d\sigma^{(1)}\frac{2\pi}{\alpha\ln^2\left(s/m_\mu^2\right)}I_1^2\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\ln\frac{s}{m_\mu^2}\right),\quad d\sigma^{(1)}=\frac{2\pi\alpha^2}{s^2}\,dt,\tag{137,29}$$

где $d\sigma^{(1)}$ — сечение в борновском приближении в ультрарелятивистском случае (см. задачу 6, § 81)[1].

[1]) Дополнительные ссылки на работы по дважды логарифмическим асимптотикам можно найти в обзорной статье: *Горшков В. Г.*//УФН. — 1973. — Т. 110. — С. 45.