

Задача

Найти сечение рассеяния электрона на адроне со спином 0.
Решение. Используя (138,5), имеем вместо (139,3)

$$M_{fi} = -\frac{4\pi e^2}{q^2} (\bar{u}'_e (\gamma P_h) u_e) F(q^2).$$

Для сечения получаем

$$d\sigma = \frac{\pi \alpha^2 dt [(s-u)^2 + (4M^2-t)t]}{[s-(M+m)^2][s-(M-m)^2] t^2} F^2(t)$$

(обозначения те же, что и в (139,4)). При $|t| \gg m^2$

$$d\sigma = d\sigma'_e \frac{\alpha^2}{4\varepsilon_e^2} \frac{\cos^2 \frac{\Phi}{2}}{\sin^4 \frac{\Phi}{2}} \frac{F^2(t)}{1 + \frac{2\varepsilon_e}{M} \sin^2 \frac{\Phi}{2}}$$

(обозначения те же, что и в (139,10)).

§ 140. Низкоэнергетическая теорема для тормозного излучения

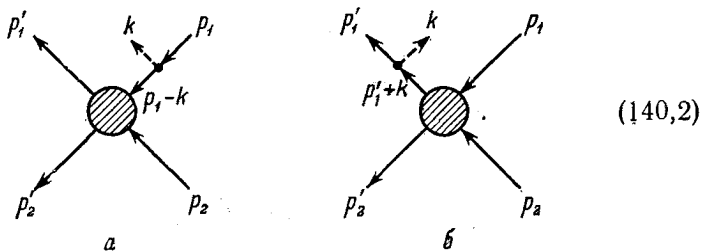
В § 98 был исследован процесс испускания фотона при столкновении частиц в пределе, когда частота фотона стремится к нулю. Оказалось, что амплитуда процесса обратно пропорциональна ω и простым образом выражается через амплитуду того же столкновения без испускания мягкого фотона (об этой последней мы будем снова говорить условно как об амплитуде «упругого» рассеяния и обозначать ее как $M_{fi}^{(ynp)}$). В следующем по ω приближении будет

$$M_{fi} = M_{fi}^{(-1)} + M_{fi}^{(0)}, \quad (140,1)$$

где к главному члену ($\propto \omega^{-1}$) добавляется не зависящий от ω ($\propto \omega^0$) поправочный член. Мы увидим, что и этот поправочный (как и главный) член может быть выражен через $M_{fi}^{(ynp)}$, причем независимо от деталей электромагнитной структуры адрона. Это утверждение называют *низкоэнергетической теоремой* для тормозного излучения (F. E. Low, 1958).

Мы видели в § 98, что основной вклад в амплитуду испускания мягкого фотона (отвечающий первому члену в (140,1)) возникает от диаграмм, в которых фотон излучается непосредственно начальной или конечной частицей. Это — диаграммы

вида



в противоположность диаграммам вида



в которых фотонная линия выходит из внутренних частей диаграммы. Для графиков (140,2) характерно, что они могут быть рассечены на две части путем пересечения одной линии виртуального адрона (начального или конечного). Другими словами, они иллюстрируют существенное в данном аспекте свойство: наличие одночастичного промежуточного состояния с одним адроном. Мы видели в § 79, что в силу требований унитарности это свойство уже само по себе приводит к появлению полюсной особенности в амплитуде.

Предположим для простоты, что из двух сталкивающихся адронов электрически заряжен (и потому может излучать) лишь один (первый) и что оба адрона не имеют спина. Волновые амплитуды u таких адронов — скаляры, которые полагаем равными 1.

Тогда вклад в амплитуду от полюсной части диаграммы ((140,2, а) имеет вид

$$iM_{fi}^{(a)} = \sqrt{4\pi} e_{\mu}^* (2p_1^{\mu} - k^{\mu}) eF \frac{1}{(p_1 - k)^2 - M^2} i\Gamma. \quad (140,4)$$

Первый множитель отвечает фотону k (e_{μ} — его 4-вектор поляризации). Второй множитель отвечает электромагнитной адронной вершине (жирная точка на диаграмме); она записана в форме (138,5), причем F — формфактор адрона. Третий множитель — пропагатор виртуального адрона $p_1 - k$ (M — его масса). Наконец, множитель $i\Gamma$ обозначает весь остальной блок.

Последний отличается от амплитуды упругого процесса

$$iM_{fi}^{(yup)} = \text{Diagram} \quad (140,5)$$

заменой реального адрона p_1 виртуальным $p_1 - k$.

Среди первых членов разложения выражения (140,4) по степеням ω будут члены: 1) обратно пропорциональные ω , 2) не зависящие от ω , но зависящие от направления k , 3) не зависящие от ω , k вовсе. Члены третьего (и только такого) рода возникнут также от «неособых» диаграмм — диаграмм вида (140,3), не содержащих полюсной особенности, и от неполюсных частей диаграмм (140,2). Мы увидим, что все такие члены вместе однозначно определяются по членам первых двух типов условием калибровочной инвариантности и потому не требуют специального вычисления.

Амплитуда упругого процесса (140,5) зависит лишь от двух инвариантных переменных:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_1' + p_2')^2, \quad t = (p_2' - p_2)^2. \quad (140,6)$$

Замена p_1 на $p_1 - k$ не только превращает s в $(p_1 - k + p_2)^2$, но вводит еще и зависимость от новой переменной

$$(p_1 - k)^2 - M^2 = -2(p_1 k),$$

характеризующей «нефизичность» импульса $p_1 - k$. Но уже первый член разложения по этой новой (малой) переменной устраняет особенность в амплитуде (140,4) и потому может дать в ней лишь не зависящие от k члены, которые, согласно сказанному выше, нас пока не интересуют. Таким образом, мы приходим к важному заключению, что вместо величины Γ в (140,4) можно подставить физическую амплитуду $M_{fi}^{(yup)}(s, t)$, лишь заменив в ней

$$s \rightarrow (p_1 + p_2 - k)^2 = s - 2k(p_1 + p_2). \quad (140,7)$$

Первые члены ее разложения:

$$\Gamma \rightarrow M_{fi}^{(yup)}(s, t) - 2(kp_1 + kp_2) \left(\frac{\partial M_{fi}^{(yup)}}{\partial s} \right)_t.$$

По такой же причине несуществен тот факт, что электромагнитный формфактор F относится здесь к вершине, в которой

из двух адронных концов (p_1 и $p_1 - k$) лишь один физический. Его можно поэтому заменить рассмотренным в § 138 формфактором вершины с двумя физическими концами, а поскольку фотон k в данном случае реальный, то $F(k^2) = F(0) = Z_1$, где eZ_1 — заряд адрона.

Таким образом, находим из (140,4)

$$M_{fi}^{(a)} = Z_1 e \sqrt{4\pi} \frac{2(e^* p_1)}{-2(k p_1)} M_{fi}^{(ynp)} - \\ - Z_1 e \sqrt{4\pi} 2(e^* p_1) \frac{1}{-2(k p_1)} 2(p_2 k) \frac{\partial M_{fi}^{(ynp)}}{\partial s} + \dots, \quad (140,8)$$

где многоточие означает члены, не зависящие от k вовсе (между тем как второй член в (140,8) зависит от направления k). Аналогичным образом найдем, что вклад в M_{fi} диаграммы (140,2, б) отличается от (140,8) заменой p_1, p_2, k на $p'_1, p'_2, -k$. Для главного члена разложения получим в результате известное уже нам выражение

$$M_{fi}^{(-1)} = Z_1 e \sqrt{4\pi} \left(\frac{(p'_1 e^*)}{(p'_1 k)} - \frac{(p_1 e^*)}{(p_1 k)} \right) M_{fi}^{(ynp)} \quad (140,9)$$

(ср. (98,5)).

Не зависящие же от k члены можно определить из требования, чтобы амплитуда в целом была калибровочно-инвариантна. Именно, она не должна меняться при замене $e^* \rightarrow e^* + \text{const} \cdot k$, т. е. должна иметь вид $M_{fi} = e_\mu^* J^\mu$, причем $k_\mu J^\mu = 0$. Легко видеть, что для этого нужно добавить к (140,8) не зависящий от k член

$$-2Z_1 e \sqrt{4\pi} (p_2 e^*),$$

и аналогично для диаграммы (140,2, б). В результате получим окончательно

$$M_{fi}^{(0)} = 2Z_1 e \sqrt{4\pi} e_\mu^* \left[p_1^\mu \frac{(p_2 k)}{(p_1 k)} - p_2^\mu + p_1'^\mu \frac{(p_2 k)}{(p_1 k)} - p_2'^\mu \right] \frac{\partial M_{fi}^{(ynp)}}{\partial s}. \quad (140,10)$$

Эта формула решает поставленную задачу. Ее можно представить в более компактном виде, заменив тождественно

$$2p_{2\nu} \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)_t = \left(\frac{\partial}{\partial p_1^\nu} \right)_{p'_1, p'_2, p'_2}$$

(и аналогично для $\partial/\partial p'_i$) и введя дифференциальные операторы

$$\hat{d}_{i\mu} = \frac{p_{i\mu}}{(p_ik)} k^\nu \frac{\partial}{\partial p_i^\nu} - \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \quad (140,11)$$

(и аналогично $\hat{d}'_{i\mu}$). Тогда

$$M_{fi}^{(0)} = Z_1 e \sqrt{4\pi} e_\mu^* (\hat{d}_1^\mu + \hat{d}'_1^\mu) M_{fi}^{(y\text{np})}. \quad (140,12)$$

Сечение определяется квадратом $|M_{fi}|^2$; с требуемой точностью

$$|M_{fi}|^2 = |M_{fi}^{(-1)}|^2 + 2 \operatorname{Re} (M_{fi}^{(-1)} M_{fi}^{(0)*}). \quad (140,13)$$

Второй член дает искомую поправку к сечению излучения. Просуммировав по поляризациям фотона, получим для этой поправки следующее выражение:

$$-4\pi (Z_1 e)^2 \left(\frac{p'}{(p'k)} - \frac{p}{(pk)} \right)^\mu (\hat{d}'_1 + \hat{d}_1)_\mu |M_{fi}^{(y\text{np})}|^2. \quad (140,14)$$

Таким образом, поправка к сечению излучения выражается через сечение упругого процесса и его производную по s .

Если заряженный адрон имеет спин $1/2$, то вся принципиальная сторона вычислений остается прежней. Меняется лишь конкретный вид вершин и пропагаторов. При этом оказывается, что после усреднения по поляризациям адронов и фотона остается справедливой формула (140,14) (Т. Н. Burnett, N. M. Kroll, 1968).

§ 141. Низкоэнергетическая теорема для рассеяния фотона на адроне

В пределе малых частот сечение рассеяния фотона на всякой неподвижной заряженной частице стремится к своему классическому значению, даваемому формулой Томсона. Этому пределу соответствует не зависящая от частоты фотона ω амплитуда, которую обозначим $M_{fi}^{(0)}$. Оказывается, однако, что и для рассеяния фотона (как и для рассмотренного в предыдущем параграфе тормозного излучения) не зависит от деталей электромагнитной структуры адрона не только этот первый, но и следующий член разложения амплитуды по степеням ω :

$$M_{fi} = M_{fi}^{(0)} + M_{fi}^{(1)}, \quad (141,1)$$

где $M^{(1)} \sim \omega$ (F. E. Low, 1954; M. Gell-Mann, M. L. Goldberger, 1954).