ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ СТАТИСТИКИ

§ 1. Статистическое распределение

Предмет *статистической физики*, или, как говорят для краткости, просто *статистики*, составляет изучение особого типа закономерностей, которым подчиняются поведение и свойства макроскопических тел, т. е. тел, состоящих из колоссального количества отдельных частиц—атомов и молекул. Общий характер этих закономерностей в значительной степени не зависит от того, какой механикой описывается движение отдельных частиц тела—классической или квантовой. Их обоснование, однако, требует в этих двух случаях различных рассуждений; для удобства изложения мы будем сначала проводить все рассуждения, предполагая, что справедлива классическая механика.

Составляя уравнения движения механической системы в числе, равном числу степеней свободы, и интегрируя их, мы принципиально можем получить исчерпывающие сведения о движении системы. Однако если нам приходится иметь дело с системой, хотя и подчиняющейся законам классической механики, но обладающей колоссальным числом степеней свободы, то при практическом применении методов механики мы сталкиваемся с необходимостью составить и решить такое же число дифференциальных уравнений, что представляется, вообще говоря, практически неосуществимым. Следует подчеркнуть, что если бы даже и можно было проинтегрировать в общем виде эти уравнения, то совершенно невозможно было бы подставить в общее решение начальные условия для скоростей и координат всех частиц.

На первый взгляд отсюда можно было бы заключить, что с увеличением числа частиц должны невообразимо возрастать сложность и запутанность свойств механической системы и что в поведении макроскопического тела мы не сможем найти и следов какой-либо закономерности. Однако это не так, и мы увидим в дальнейшем, что при весьма большом числе частиц появляются новые своеобразные закономерности.

Эти—так называемые *статистические*—закономерности, обусловленные именно наличием большого числа составляющих тело частиц, ни в какой степени не могут быть сведены к чисто механическим закономерностям. Их специфичность проявляется в том, что они теряют всякое содержание при переходе к механическим системам с небольшим числом степеней свободы. Таким образом, хотя движение систем с огромным числом степеней свободы подчиняется тем же законам механики, что и движение систем из небольшого числа частиц, наличие большого числа степеней свободы приводит к качественно новым закономерностям.

Значение статистической физики в ряду других разделов теоретической физики определяется тем, что в природе мы постоянно встречаемся с макроскопическими телами, поведение которых по указанным причинам не может быть исчерпывающе описано чисто механическими методами и которые подчиняются статистическим закономерностям.

Переходя к формулированию основной задачи классической статистики, мы должны, прежде всего, ввести понятие *фазового пространства*, которым нам придется в дальнейшем постоянно пользоваться.

Пусть рассматриваемая макроскопическая механическая система имеет s степеней свободы. Другими словами, положение точек этой системы в пространстве характеризуется s координатами, которые мы будем обозначать буквами q_i, где индекс i пробегает значения $1, 2, \ldots, s$. Тогда состояние этой системы в данный момент будет определяться значениями в этот же момент s координат q_i и s соответствующих им скоростей $\dot{q}_i$. В статистике принято пользоваться для характеристики системы ее координатами и импульсами p_i, а не скоростями, так как это дает ряд весьма существенных преимуществ. Различные состояния системы можно математически представить точками в так называемом фазовом пространстве (являющемся, конечно, чисто математическим понятием); на координатных осях этого пространства откладываются значения координат и импульсов данной системы. При этом каждая система имеет свое собственное фазовое пространство, число измерений которого равно удвоенному числу ее степеней свободы. Всякая точка фазового пространства, соответствуя определенным значениям координат системы q_i и ее импульсов p_i, изображает собой определенное состояние этой системы. С течением времени состояние системы изменяется, и, соответственно, изображающая состояние системы точка фазового пространства (мы будем ниже говорить просто «фазовая точка системы») будет описывать в нем некоторую линию, называемую фазовой траекторией.

Рассмотрим теперь какое-либо макроскопическое тело или систему тел. Предположим, что система замкнута, т. е. не взаимодействует ни с какими другими телами. Выделим мысленно из этой системы некоторую часть, весьма малую по сравнению со всей системой, но в то же время макроскопическую; ясно, что при достаточно большом числе частиц во всей системе число частиц в ее малой части может еще быть очень большим. Такие относительно малые, но макроскопические части мы будем называть *подсистемами*. Подсистема есть опять механическая система, но уже отнюдь не замкнутая, а, напротив, испытывающая всевозможные воздействия со стороны остальных частей системы. Благодаря огромному числу степеней свободы этих остальных частей, эти взаимодействия будут иметь весьма сложный и запутанный характер. Поэтому и состояние рассматриваемой подсистемы будет меняться со временем весьма сложным и запутанным образом.

Точное решение задачи о поведении подсистемы возможно только путем решения задачи механики для всей замкнутой системы, т. е. путем составления и решения всех дифференциальных уравнений движения при данных начальных условиях, что, как уже отмечалось, представляет собой невыполнимую задачу. Но, к счастью, именно тот чрезвычайно сложный ход изменения состояния подсистем, который делает неприменимыми методы механики, дает возможность подойти к решению задачи с другой стороны.

Основой для этого подхода является то обстоятельство, что, в силу чрезвычайной сложности и запутанности внешних воздействий со стороны остальных частей, за достаточно большой промежуток времени выделенная нами подсистема побывает достаточно много раз во всех возможных своих состояниях. Точнее это обстоятельство надо сформулировать следующим образом. Обозначим посредством $\Delta p\,\Delta q$ некоторый малый участок «объема» фазового пространства подсистемы, соответствующий значениям ее координат q_i и импульсов p_i, лежащим в некоторых малых интервалах Δq_i и Δp_i. Можно утверждать, что в течение достаточно большого промежутка времени T чрезвычайно запутанная фазовая траектория много раз пройдет через всякий такой участок фазового пространства. Пусть Δt есть та часть полного времени T, в течение которого подсистема «находилась» в данном участке фазового пространства $\Delta p\,\Delta q$[1]). При неограниченном увеличении полного времени T отношение $\Delta t/T$ будет стремиться к некоторому пределу

$$w = \lim_{T\to\infty} \frac{\Delta t}{T}. \tag{1,1}$$

Эту величину можно, очевидно, рассматривать как вероятность того, что при наблюдении подсистемы в некоторый произвольный

---

[1]) Для краткости мы будем обычно говорить, как это принято, о том, что система «находится в участке $\Delta p\,\Delta q$ фазового пространства», подразумевая при этом, что система находится в состояниях, изображающихся фазовыми точками в этом участке.

момент времени мы обнаружим ее находящейся в данном участке $\Delta p\,\Delta q$ фазового пространства.

Переходя к бесконечно малому элементу фазового объема[1])

$$dq\,dp = dq_1\,dq_2 \ldots dq_s\,dp_1\,dp_2 \ldots dp_s, \tag{1,2}$$

мы можем ввести вероятность dw состояний, изображающихся точками в этом элементе, т. е. вероятность координатам q_i и импульсам p_i иметь значения, лежащие в заданных бесконечно малых интервалах между q_i, p_i и q_i+dq_i, p_i+dp_i. Эту вероятность dw можно написать в виде

$$dw = \rho\,(p_1, \ldots, p_s, q_1, \ldots, q_s)\,dp\,dq, \tag{1,3}$$

где $\rho\,(p_1, \ldots, p_s, q_1 \ldots, q_s)$ есть функция всех координат и импульсов (мы будем обычно писать сокращенно $\rho\,(p, q)$ или даже просто ρ). Функцию ρ, играющую роль «плотности» распределения вероятности в фазовом пространстве, называют *функцией статистического распределения* (или просто функцией распределения) данного тела. Функция распределения должна, очевидно, удовлетворять *условию нормировки*

$$\int \rho\,dp\,dq = 1 \tag{1,4}$$

(интеграл берется по всему фазовому пространству), выражающему собой просто тот факт, что сумма вероятностей всех возможных состояний должна быть равна единице.

Чрезвычайно существенным для статистики является следующее обстоятельство. Статистическое распределение данной подсистемы не зависит от начального состояния какой-либо другой малой части той же системы, так как влияние этого начального состояния будет в течение достаточно большого промежутка времени совершенно вытеснено влиянием остальных, гораздо более обширных частей системы. Оно не зависит также от начального состояния самой выделенной нами малой части, поскольку она с течением времени проходит через все возможные состояния и каждое из них может быть выбрано в качестве начального. Поэтому статистическое распределение для малых частей системы можно найти, не решая задачи механики для этой системы с учетом начальных условий.

Нахождение статистического распределения для любой подсистемы и является основной задачей статистики. Говоря о «малых частях» замкнутой системы, следует иметь в виду, что макроскопические тела, с которыми нам приходится иметь дело, обычно уже сами по себе являются такими «малыми частями» большой

---

[1]) В дальнейшем мы будем всегда условно обозначать посредством dp и dq произведения дифференциалов соответственно всех импульсов и всех координат системы.

замкнутой системы, состоящей из этих тел вместе с внешней средой, в которую они погружены.

Если указанная задача решена и статистическое распределение данной подсистемы известно, то можно вычислить вероятности различных значений любых физических величин, зависящих от состояния этой подсистемы (т. е. от значений ее координат q и импульсов p). Мы можем также вычислить среднее значение любой такой величины $f(p, q)$, получающееся путем умножения ее возможных значений на соответствующие вероятности и интегрирования по всем состояниям. Обозначая усреднение чертой над буквой, можно написать формулу

$$\bar{f} = \int f(p, q)\, \rho(p, q)\, dp\, dq, \tag{1,5}$$

по которой вычисляются средние значения различных величин с помощью функции статистического распределения [1]).

Усреднение с помощью функции распределения (или, как говорят, *статистическое усреднение*) освобождает нас от необходимости следить за изменением истинного значения физической величины $f(p, q)$ со временем с целью определения ее среднего значения. В то же время очевидно, что в силу самого определения понятия вероятности, согласно формуле (1,1), статистическое усреднение полностью эквивалентно усреднению по времени. Последнее означало бы, что, следя за ходом изменения величины со временем, мы должны были бы построить функцию $f = f(t)$, после чего искомое среднее значение определилось бы как

$$\bar{f} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt.$$

Из изложенного ясно, что выводы и предсказания о поведении макроскопических тел, которые позволяет делать статистика, имеют вероятностный характер. Этим статистика отличается от механики (классической), выводы которой имеют вполне однозначный характер. Следует, однако, подчеркнуть, что вероятностный характер результатов классической статистики сам по себе отнюдь не лежит в самой природе рассматриваемых ею объектов, а связан лишь с тем, что эти результаты получаются на основании гораздо меньшего количества данных, чем это нужно было бы для полного механического описания (не требуются начальные значения всех координат и импульсов).

Практически, однако, при применении статистики к макроскопическим телам ее вероятностный характер обычно совершенно

[1]) В этой книге мы будем обозначать усреднение чертой над буквой или угловыми скобками: $\bar{f}$ или $\langle f \rangle$, руководствуясь при этом исключительно удобством записи формул; второй способ предпочтительнее для записи средних значений громоздких выражений.

не проявляется. Дело в том, что если наблюдать любое макроскопическое тело (находящееся в стационарных, т. е. не зависящих от времени, внешних условиях) в течение достаточно большого промежутка времени, то окажется, что все характеризующие это тело физические величины являются практически постоянными (равными своим средним значениям) и лишь сравнительно очень редко испытывают сколько-нибудь заметные отклонения; при этом разумеется, речь идет о *макроскопических* величинах, характеризующих тело в целом или его отдельные макроскопические же части, но не отдельные частицы[1]). Это основное для статистики обстоятельство следует из весьма общих соображений (изложенных в следующем параграфе) и тем более справедливо, чем сложнее и больше рассматриваемое тело. В терминах статистического распределения можно сказать, что если с помощью функции $\rho(p, q)$ построить функцию распределения вероятностей различных значений величины $f(p, q)$, то эта функция будет иметь чрезвычайно резкий максимум при $f=\bar{f}$, будучи сколько-нибудь заметно отличной от нуля лишь в самой непосредственной близости к точке максимума.

Таким образом, давая возможность вычислять средние значения величин, характеризующих макроскопические тела, статистика тем самым позволяет делать предсказания, оправдывающиеся с весьма большой точностью для подавляющей части любого промежутка времени — настолько большого, чтобы полностью сгладилось влияние начального состояния тела. В этом смысле предсказания статистики приобретают практически определенный, а не вероятностный характер. (Имея все это в виду, мы в дальнейшем при употреблении средних значений макроскопических величин почти никогда не будем писать черты над буквой).

Если замкнутая макроскопическая система находится в таком состоянии, в котором для любой ее части, являющейся самой по себе макроскопическим телом, макроскопические физические величины с большой относительной точностью равны своим средним значениям, то говорят, что система находится в состоянии *статистического равновесия* (о нем говорят также как о *термодинамическом* или *тепловом* равновесии). Из предыдущего видно, что если замкнутая макроскопическая система наблюдается в течение достаточно большого промежутка времени, то подавляющую часть этого промежутка она проводит в состоянии статистического

---

[1]) Приведем пример, наглядно показывающий, с какой огромной точностью выполняется это правило. Если выделить в каком-либо газе участок, содержащий, скажем, всего 1/100 грамм-молекулы, то оказывается, что среднее относительное отклонение, испытываемое энергией этого количества вещества, от своего среднего значения составляет всего $\sim 10^{-11}$. Вероятность же найти (при однократном наблюдении) относительное отклонение, скажем, порядка 10^{-6}, изображается чудовищно малым числом $\sim 10^{-3\cdot 10^{15}}$.

равновесия. Если в какой-нибудь начальный момент времени замкнутая макроскопическая система не находилась в состоянии статистического равновесия (например, была искусственно выведена из такого состояния внешними воздействиями, после чего была вновь предоставлена самой себе, т. е. вновь стала замкнутой системой), то в дальнейшем она обязательно перейдет в состояние равновесия. Промежуток времени, в течение которого должен обязательно произойти переход к статистическому равновесию, называют *временем релаксации*. Говоря выше о «достаточно больших» промежутках времени, мы по существу имели в виду времена, большие по сравнению со временем релаксации.

Теорию процессов, связанных с переходом в состояние равновесия, называют *кинетикой*; она не рассматривается собственно статистикой, изучающей системы, находящиеся в статистическом равновесии.

§ 2. Статистическая независимость

Подсистемы, о которых шла речь в § 1, не являются сами по себе замкнутыми. Напротив, они подвергаются непрерывному воздействию со стороны прочих частей системы. Но благодаря тому, что эти части, малые по сравнению со всей большой системой, являются сами по себе тоже макроскопическими телами, мы можем все же считать, что в течение не слишком больших промежутков времени они ведут себя приблизительно как замкнутые системы. В самом деле, во взаимодействии подсистемы с окружающими частями участвуют преимущественно те частицы, которые находятся вблизи ее поверхности. Но относительное количество этих частиц по сравнению с полным числом частиц в подсистеме быстро падает при увеличении размеров последней, и при достаточной величине подсистемы энергия ее взаимодействия с окружающими частями будет мала по сравнению с ее внутренней энергией. Таким образом, можно сказать, что подсистемы являются *квазизамкнутыми*. Подчеркнем лишний раз, что квазизамкнутость подсистем имеет место лишь на протяжении не слишком длительных промежутков времени. В течение же достаточно большого промежутка времени влияние взаимодействия подсистем — сколь бы оно ни было слабым — все равно проявится. Больше того, именно это сравнительно слабое взаимодействие и приводит в конце концов к установлению статистического равновесия.

Тот факт, что различные подсистемы можно считать слабо взаимодействующими друг с другом, приводит к тому, что их можно считать независимыми также и в статистическом смысле. *Статистическая независимость* означает, что состояние, в котором находится одна из подсистем, никак не влияет на вероятности различных состояний других подсистем.