равновесия. Если в какой-нибудь начальный момент времени замкнутая макроскопическая система не находилась в состоянии статистического равновесия (например, была искусственно выведена из такого состояния внешними воздействиями, после чего была вновь предоставлена самой себе, т. е. вновь стала замкнутой системой), то в дальнейшем она обязательно перейдет в состояние равновесия. Промежуток времени, в течение которого должен обязательно произойти переход к статистическому равновесию, называют *временем релаксации*. Говоря выше о «достаточно больших» промежутках времени, мы по существу имели в виду времена, большие по сравнению со временем релаксации.

Теорию процессов, связанных с переходом в состояние равновесия, называют *кинетикой*; она не рассматривается собственно статистикой, изучающей системы, находящиеся в статистическом равновесии.

§ 2. Статистическая независимость

Подсистемы, о которых шла речь в § 1, не являются сами по себе замкнутыми. Напротив, они подвергаются непрерывному воздействию со стороны прочих частей системы. Но благодаря тому, что эти части, малые по сравнению со всей большой системой, являются сами по себе тоже макроскопическими телами, мы можем все же считать, что в течение не слишком больших промежутков времени они ведут себя приблизительно как замкнутые системы. В самом деле, во взаимодействии подсистемы с окружающими частями участвуют преимущественно те частицы, которые находятся вблизи ее поверхности. Но относительное количество этих частиц по сравнению с полным числом частиц в подсистеме быстро падает при увеличении размеров последней, и при достаточной величине подсистемы энергия ее взаимодействия с окружающими частями будет мала по сравнению с ее внутренней энергией. Таким образом, можно сказать, что подсистемы являются *квазизамкнутыми*. Подчеркнем лишний раз, что квазизамкнутость подсистем имеет место лишь на протяжении не слишком длительных промежутков времени. В течение же достаточно большого промежутка времени влияние взаимодействия подсистем — сколь бы оно ни было слабым — все равно проявится. Больше того, именно это сравнительно слабое взаимодействие и приводит в конце концов к установлению статистического равновесия.

Тот факт, что различные подсистемы можно считать слабо взаимодействующими друг с другом, приводит к тому, что их можно считать независимыми также и в статистическом смысле. *Статистическая независимость* означает, что состояние, в котором находится одна из подсистем, никак не влияет на вероятности различных состояний других подсистем.

Рассмотрим какие-либо две подсистемы, и пусть $dp^{(1)}dq^{(1)}$ и $dp^{(2)}dq^{(2)}$ — элементы объема их фазовых пространств. Если рассматривать совокупность обеих подсистем как одну составную подсистему, то с математической точки зрения статистическая независимость подсистем означает, что вероятность составной подсистеме находиться в элементе ее фазового объема $dp^{(12)}dq^{(12)} = dp^{(1)}dq^{(1)}\cdot dp^{(2)}dq^{(2)}$ разбивается на произведение вероятностей нахождения каждой из подсистем соответственно в $dp^{(1)}dq^{(1)}$ и $dp^{(2)}dq^{(2)}$, причем каждая из этих вероятностей зависит только от координат и импульсов данной подсистемы. Таким образом, можно написать:

$$\rho_{12}\,dp^{(12)}dq^{(12)} = \rho_1\,dp^{(1)}dq^{(1)}\cdot\rho_2\,dp^{(2)}dq^{(2)},$$

или

$$\rho_{12} = \rho_1\rho_2, \tag{2,1}$$

где ρ_{12} — статистическое распределение составной подсистемы, а ρ_1, ρ_2 — функции распределения отдельных подсистем; аналогичное соотношение можно написать и для совокупности нескольких подсистем [1]).

Можно, очевидно, утверждать и обратное: если распределение вероятностей для некоторой сложной системы распадается на произведение множителей, каждый из которых зависит только от величин, описывающих одну из частей системы, то это значит, что эти части статистически независимы, причем каждый из множителей пропорционален вероятности состояний соответствующей части.

Если f_1 и f_2 — две физические величины, относящиеся к двум различным подсистемам, то из (2,1) и определения средних значений согласно (1,5) непосредственно следует, что среднее значение произведения f_1f_2 равно произведению средних значений каждой из величин f_1 и f_2 в отдельности:

$$\overline{f_1f_2} = \bar{f}_1\cdot\bar{f}_2. \tag{2,2}$$

Рассмотрим какую-либо величину f, относящуюся к некоторому макроскопическому телу или его отдельной части. С течением времени эта величина меняется, колеблясь вокруг своего среднего значения. Введем величину, характеризующую в среднем ширину интервала этого изменения. В качестве такой характеристики нельзя взять среднее значение разности $\Delta f = f - \bar{f}$, так как величина f отклоняется от своего среднего значения как в ту, так и в другую сторону, и среднее значение разности $\overline{f - \bar{f}}$, попеременно то положительной, то отрицательной, окажется равным нулю независимо от того, насколько часто f испытывала

[1]) При условии, конечно, чтобы совокупность этих подсистем все еще составляла малую часть всей замкнутой системы.

значительные отклонения от среднего значения. В качестве искомой характеристики удобно взять среднее значение квадрата этой разности. Так как величина $(\Delta f)^2$ всегда положительна, то ее среднее значение стремится к нулю лишь если она сама стремится к нулю; другими словами, оно окажется малым только тогда, когда значительные отклонения f от $\bar{f}$ обладают малой вероятностью. Величину $\langle(\Delta f)^2\rangle^{1/2}$ называют *средней квадратичной флуктуацией* величины f. Раскрыв квадрат $(f-\bar{f})^2$, найдем, что

$$\langle(\Delta f)^2\rangle=\overline{f^2}-\bar{f}^2, \tag{2,3}$$

т. е. средняя квадратичная флуктуация определяется разностью между средним квадратом величины и квадратом ее среднего значения.

Отношение $\langle(\Delta f)^2\rangle^{1/2}/\bar{f}$ называют *относительной флуктуацией* величины f. Чем это отношение меньше, тем более ничтожную часть времени тело проводит в таких состояниях, в которых отклонение величины f от ее среднего значения составляет заметную часть этого последнего.

Покажем, что относительная флуктуация физических величин быстро уменьшается при увеличении размеров (числа частиц) тел, к которым они относятся. Для этого заметим предварительно, что большинство величин, представляющих физический интерес, являются аддитивными; это обстоятельство — следствие квазизамкнутости отдельных частей тела и состоит в том, что значение такой величины для всего тела равно сумме значений этой величины для отдельных его (макроскопических) частей. Действительно, поскольку, например, внутренние энергии этих частей, согласно сказанному выше, велики по сравнению с энергиями их взаимодействия, то энергию всего тела можно с достаточной точностью считать равной сумме энергий его частей.

Пусть f — такая аддитивная величина. Разобьем мысленно рассматриваемое тело на большое число N примерно одинаковых малых частей. Тогда

$$\bar{f}=\sum_{i=1}^{N}\bar{f}_i,$$

где величины f_i относятся к отдельным частям тела.

Ясно, что с увеличением размеров тела $\bar{f}$ растет примерно пропорционально N. Далее, определим среднюю квадратичную флуктуацию величины f. Имеем

$$\langle(\Delta f)^2\rangle=\left\langle\left(\sum_i \Delta f_i\right)^2\right\rangle.$$

Но в силу статистической независимости различных частей тела средние значения произведений

$$\overline{\Delta f_i \Delta f_k} = \overline{\Delta f_i} \cdot \overline{\Delta f_k} = 0 \qquad (i \neq k)$$

(поскольку каждое $\overline{\Delta f_i} = 0$). Следовательно,

$$\langle (\Delta f)^2 \rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle (\Delta f_i)^2 \rangle. \tag{2,4}$$

Отсюда следует, что при увеличении N средний квадрат $\langle (\Delta f)^2 \rangle$ тоже будет расти пропорционально N. Относительная же флуктуация будет, таким образом, обратно пропорциональна $\sqrt{N}$;

$$\frac{\langle (\Delta f)^2 \rangle^{1/2}}{\bar{f}} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}. \tag{2,5}$$

С другой стороны, если условиться разделять однородное тело на участки определенной малой величины, то ясно, что число таких частей будет пропорционально полному числу частиц (молекул) в теле. Поэтому полученный результат можно сформулировать также, сказав, что относительная флуктуация всякой аддитивной величины f убывает обратно пропорционально квадратному корню из числа частиц макроскопического тела, а потому при достаточно большом их числе самая величина f может считаться практически постоянной во времени и равной своему среднему значению. Этот вывод был уже использован в предыдущем параграфе.

§ 3. Теорема Лиувилля

Вернемся к дальнейшему изучению свойств функции статистического распределения.

Предположим, что мы наблюдаем в течение весьма длительного промежутка времени некоторую подсистему. Разделим этот промежуток времени на очень большое (в пределе — бесконечное) количество одинаковых малых интервалов, разделенных моментами времени $t_1, t_2, \ldots$ В каждый из этих моментов рассматриваемая подсистема изобразится в ее фазовом пространстве точкой (назовем эти точки $A_1, A_2, A_3, \ldots$). Совокупность полученных точек распределится в фазовом пространстве с плотностью, в пределе пропорциональной в каждом данном месте значению функции распределения $\rho(p, q)$, по самому смыслу последней, как определяющей вероятности различных состояний подсистемы.

Вместо того чтобы рассматривать точки, изображающие состояния одной подсистемы в различные моменты времени $t_1, t_2, \ldots$, можно формальным образом ввести в рассмотрение одновременно очень большое (в пределе — бесконечное) число совершенно оди-