средние значения произведений

$$\overline{\Delta f_i \Delta f_k} = \overline{\Delta f_i} \cdot \overline{\Delta f_k} = 0 \qquad (i \neq k)$$

(поскольку каждое $\overline{\Delta f_i} = 0$). Следовательно,

$$\langle(\Delta f)^2\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle(\Delta f_i)^2\rangle. \tag{2,4}$$

Отсюда следует, что при увеличении N средний квадрат $\langle(\Delta f)^2\rangle$ тоже будет расти пропорционально N. Относительная же флуктуация будет, таким образом, обратно пропорциональна $\sqrt{N}$;

$$\frac{\langle(\Delta f)^2\rangle^{1/2}}{\bar{f}} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}. \tag{2,5}$$

С другой стороны, если условиться разделять однородное тело на участки определенной малой величины, то ясно, что число таких частей будет пропорционально полному числу частиц (молекул) в теле. Поэтому полученный результат можно сформулировать также, сказав, что относительная флуктуация всякой аддитивной величины f убывает обратно пропорционально квадратному корню из числа частиц макроскопического тела, а потому при достаточно большом их числе самая величина f может считаться практически постоянной во времени и равной своему среднему значению. Этот вывод был уже использован в предыдущем параграфе.

§ 3. Теорема Лиувилля

Вернемся к дальнейшему изучению свойств функции статистического распределения.

Предположим, что мы наблюдаем в течение весьма длительного промежутка времени некоторую подсистему. Разделим этот промежуток времени на очень большое (в пределе — бесконечное) количество одинаковых малых интервалов, разделенных моментами времени $t_1, t_2, \ldots$ В каждый из этих моментов рассматриваемая подсистема изобразится в ее фазовом пространстве точкой (назовем эти точки $A_1, A_2, A_3, \ldots$). Совокупность полученных точек распределится в фазовом пространстве с плотностью, в пределе пропорциональной в каждом данном месте значению функции распределения $\rho(p, q)$, по самому смыслу последней, как определяющей вероятности различных состояний подсистемы.

Вместо того чтобы рассматривать точки, изображающие состояния одной подсистемы в различные моменты времени $t_1, t_2, \ldots$, можно формальным образом ввести в рассмотрение одновременно очень большое (в пределе — бесконечное) число совершенно одинаковым образом устроенных подсистем[1]), находящихся в некоторый момент времени (скажем, $t=0$) в состояниях, изображающихся точками A_1, A_2, ...

Будем теперь следить за дальнейшим передвижением фазовых точек, изображающих состояния этих подсистем, в течение не слишком большого промежутка времени — такого, чтобы квазизамкнутую подсистему можно было с достаточной точностью рассматривать как замкнутую. Передвижение фазовых точек будет происходить тогда согласно уравнениям механики, содержащим координаты и импульсы только частиц подсистемы.

Ясно, что в каждый момент времени t с тем же правом, что и в момент $t=0$, все эти точки будут распределены в фазовом пространстве согласно той же функции распределения $\rho(p, q)$. Другими словами, передвигаясь с течением времени, фазовые точки остаются распределенными с неизменной в каждом данном месте плотностью, пропорциональной соответствующему значению ρ.

Чисто формальным образом это передвижение фазовых точек можно рассматривать как стационарное течение «газа» в $2s$-мерном фазовом пространстве и применить к нему известное уравнение непрерывности, выражающее собой неизменность общего числа «частиц» (в данном случае — фазовых точек) газа. Обычное уравнение непрерывности имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

(ρ — плотность, $\mathbf{v}$ — скорость газа), а для стационарного течения

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Обобщение последнего соотношения на случай $2s$-мерного пространства

$$\sum_{i=1}^{2s} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0.$$

В данном случае «координатами» x_i являются координаты q и импульсы p, а «скоростями» $v_i = \dot{x}_i$ — производные по времени $\dot{q}$ и $\dot{p}$, определяемые уравнениями механики. Таким образом, имеем:

$$\sum_{i=1}^{s} \left[\frac{\partial}{\partial q_i}(\rho \dot{q}_i) + \frac{\partial}{\partial p_i}(\rho \dot{p}_i) \right] = 0.$$

Раскрывая производные, пишем:

$$\sum_{i=1}^{s} \left[\dot{q}_i \frac{\partial \rho}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \right] + \rho \sum_{i=1}^{s} \left[\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right] = 0. \tag{3,1}$$

[1]) Такую воображаемую совокупность одинаковых систем обычно называют *статистическим ансамблем*.

Написав уравнения механики в форме Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

где $H = H(p, q)$—функция Гамильтона рассматриваемой подсистемы, мы видим, что

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} = -\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i}.$$

Поэтому второй член в (3,1) тождественно обращается в нуль. Первый же член есть не что иное, как полная производная от функции распределения по времени. Таким образом, имеем:

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0. \tag{3,2}$$

Мы приходим, следовательно, к существенному выводу, что функция распределения постоянна вдоль фазовых траекторий подсистемы (так называемая *теорема Лиувилля*); напомним, что поскольку мы говорим о квазизамкнутых подсистемах, то полученный результат справедлив лишь для не слишком больших промежутков времени, в течение которых подсистема с достаточной точностью ведет себя как замкнутая.

§ 4. Роль энергии

Из теоремы Лиувилля непосредственно следует, что функция распределения должна выражаться лишь через такие комбинации переменных p, q, которые при движении подсистемы, как замкнутой, остаются постоянными. Это—так называемые механические инварианты или *интегралы движения*, являющиеся, как известно, первыми интегралами уравнений движения. Можно, следовательно, сказать, что функция распределения, являясь функцией механических инвариантов, сама есть интеграл движения.

Оказывается возможным чрезвычайно сузить число интегралов движения, от которых может зависеть функция распределения. Для этого надо учесть, что распределение ρ_{12} для совокупности двух подсистем равно произведению функций распределения ρ_1 и ρ_2 этих подсистем в отдельности: $\rho_{12} = \rho_1 \rho_2$. Поэтому

$$\ln \rho_{12} = \ln \rho_1 + \ln \rho_2, \tag{4,1}$$

т. е. логарифм функции распределения есть величина аддитивная. Мы приходим, следовательно, к заключению, что логарифм функции распределения должен быть не просто интегралом движения, но и аддитивным интегралом движения.

Как известно из механики, существует всего семь независимых аддитивных интегралов движения: энергия, три компоненты