ГЛАВА V

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФЕРМИ И БОЗЕ

§ 53. Распределение Ферми

Если температура идеального газа (при заданной его плотности) достаточно низка, то статистика Больцмана становится неприменимой, и должна быть построена другая статистика, в которой средние числа заполнения различных квантовых состояний частиц не предполагаются малыми.

Эта статистика, однако, оказывается различной в зависимости от того, какого рода волновыми функциями описывается газ, рассматриваемый как система N одинаковых частиц. Как известно, волновые функции должны быть либо антисимметричными, либо симметричными по отношению к перестановкам любой пары частиц, причем первый случай имеет место для частиц с полуцелым, а второй—для частиц с целым спином.

Для системы частиц, описывающейся антисимметричными волновыми функциями, справедлив принцип Паули: в каждом квантовом состоянии может находиться одновременно не более одной частицы. Статистика, основанная на этом принципе, называется *статистикой Ферми* (или статистикой Ферми—Дирака)[1].

Подобно тому как мы это делали в § 37, применим распределение Гиббса к совокупности всех частиц газа, находящихся в данном квантовом состоянии; как уже указывалось в § 37, это можно делать и при наличии обменного взаимодействия между частицами. Снова обозначим посредством Ω_k термодинамический потенциал этой системы частиц и, согласно общей формуле (35,3), будем иметь

$$\Omega_k = -T \ln \sum_{n_k} \left(e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}}\right)^{n_k}, \qquad (53,1)$$

поскольку энергия n_k частиц в k-м состоянии есть просто $n_k\varepsilon_k$. Согласно принципу Паули числа заполнения каждого состояния могут принимать лишь значения 0 или 1. Поэтому получаем

$$\Omega_k = -T \ln \left(1 + e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}}\right).$$

[1]) Она была предложена *Ферми* (*E. Fermi*, 1926) для электронов, а ее связь с квантовой механикой была выяснена *Дираком* (*P. A. M. Dirac*, 1926).

Поскольку среднее число частиц в системе равно производной от потенциала Ω по химическому потенциалу μ, взятой с обратным знаком, то в данном случае искомое среднее число частиц в k-м квантовом состоянии получится как производная

$$\bar{n}_k = -\frac{\partial \Omega_k}{\partial \mu} = \frac{e^{(\mu-\varepsilon_k)/T}}{1+e^{(\mu-\varepsilon_k)/T}},$$

или окончательно

$$\bar{n}_k = \frac{1}{e^{(\varepsilon_k-\mu)/T}+1}. \tag{53,2}$$

Это и есть функция распределения для идеального газа, подчиняющегося статистике Ферми, или, как говорят коротко, для *ферми-газа*. Как и следовало, все $\bar{n}_k \leqslant 1$. При $\exp[(\mu-\varepsilon_k)/T] \ll 1$ формула (53,2) переходит, естественно, в функцию распределения Больцмана.

Распределение Ферми нормировано условием

$$\sum_k \frac{1}{e^{(\varepsilon_k-\mu)/T}+1} = N, \tag{53,3}$$

где N — полное число частиц в газе. Это равенство определяет в неявном виде химический потенциал как функцию T и N.

Термодинамический потенциал Ω газа в целом получается суммированием Ω_k по всем квантовым состояниям

$$\Omega = -T\sum_k \ln\left(1+e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}}\right). \tag{53,4}$$

§ 54. Распределение Бозе

Перейдем теперь к изучению статистики, которой подчиняется идеальный газ, состоящий из частиц, описывающихся симметричными волновыми функциями, так называемой *статистики Бозе* (или статистики Бозе—Эйнштейна)[1].

Числа заполнения квантовых состояний при симметричных волновых функциях ничем не ограничены и могут иметь произвольные значения. Вывод функции распределения может быть сделан так же, как в предыдущем параграфе; пишем:

$$\Omega_k = -T\ln\sum_{n_k=0}^{\infty}\left(e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}}\right)^{n_k}.$$

[1]) Она была введена для световых квантов *Бозе* (*S. N. Bose*, 1924), а затем обобщена *Эйнштейном*.