Поскольку среднее число частиц в системе равно производной от потенциала Ω по химическому потенциалу μ, взятой с обратным знаком, то в данном случае искомое среднее число частиц в k-м квантовом состоянии получится как производная

$$\bar{n}_k = -\frac{\partial \Omega_k}{\partial \mu} = \frac{e^{(\mu-\varepsilon_k)/T}}{1+e^{(\mu-\varepsilon_k)/T}},$$

или окончательно

$$\bar{n}_k = \frac{1}{e^{(\varepsilon_k-\mu)/T}+1}. \tag{53,2}$$

Это и есть функция распределения для идеального газа, подчиняющегося статистике Ферми, или, как говорят коротко, для *ферми-газа*. Как и следовало, все $\bar{n}_k \leqslant 1$. При $\exp[(\mu-\varepsilon_k)/T] \ll 1$ формула (53,2) переходит, естественно, в функцию распределения Больцмана.

Распределение Ферми нормировано условием

$$\sum_k \frac{1}{e^{(\varepsilon_k-\mu)/T}+1} = N, \tag{53,3}$$

где N — полное число частиц в газе. Это равенство определяет в неявном виде химический потенциал как функцию T и N.

Термодинамический потенциал Ω газа в целом получается суммированием Ω_k по всем квантовым состояниям

$$\Omega = -T\sum_k \ln\left(1+e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}}\right). \tag{53,4}$$

§ 54. Распределение Бозе

Перейдем теперь к изучению статистики, которой подчиняется идеальный газ, состоящий из частиц, описывающихся симметричными волновыми функциями, так называемой *статистики Бозе* (или статистики Бозе—Эйнштейна)[1]).

Числа заполнения квантовых состояний при симметричных волновых функциях ничем не ограничены и могут иметь произвольные значения. Вывод функции распределения может быть сделан так же, как в предыдущем параграфе; пишем:

$$\Omega_k = -T\ln\sum_{n_k=0}^{\infty}\left(e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}}\right)^{n_k}.$$

[1]) Она была введена для световых квантов *Бозе* (*S. N. Bose*, 1924), а затем обобщена *Эйнштейном*.

Стоящая здесь геометрическая прогрессия сходится, только если $e^{(\mu-\varepsilon_k)/T} < 1$. Так как это условие должно иметь место для всех ε_k (в том числе и для $\varepsilon_k = 0$), ясно, что во всяком случае должно быть

$$\mu < 0. \qquad (54,1)$$

Напомним в этой связи, что для больцмановского газа химический потенциал всегда имеет отрицательные (большие по абсолютной величине) значения, а для ферми-газа μ может быть как отрицательным, так и положительным.

Суммируя геометрическую прогрессию, получим

$$\Omega_k = T \ln\left(1 - e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}}\right).$$

Отсюда находим средние числа заполнения $\bar{n}_k = -\frac{\partial \Omega_k}{\partial \mu}$,

$$\bar{n}_k = \frac{1}{e^{(\varepsilon_k-\mu)/T} - 1}. \qquad (54,2)$$

Это и есть функция распределения идеального газа, подчиняющегося статистике Бозе (или, как говорят для краткости, *бозе-газа*). Она отличается от функции распределения Ферми знаком перед 1 в знаменателе. Как и последняя, при $\exp[(\mu-\varepsilon_k)/T] \ll 1$ она переходит, естественно, в функцию распределения Больцмана. Полное число частиц в газе выражается формулой

$$N = \sum_k \frac{1}{e^{(\varepsilon_k-\mu)/T} - 1}, \qquad (54,3)$$

а термодинамический потенциал Ω газа в целом получается суммированием Ω_k по всем квантовым состояниям:

$$\Omega = T \sum_k \ln\left(1 - e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}}\right). \qquad (54,4)$$

§ 55. Неравновесные ферми- и бозе-газы

Подобно тому, как это было сделано в § 40, можно вычислить энтропию также и неравновесных ферми- и бозе-газов, а из условия максимальности энтропии снова получить функции распределения Ферми и Бозе.

В случае Ферми в каждом из квантовых состояний может находиться не более одной частицы, но числа N_j не малы, а, вообще говоря, того же порядка величины, что и числа G_j (все обозначения — те же, что и в § 40).

Число возможных способов распределения N_j одинаковых частиц по G_j состояниям (не более чем по одной в каждом) есть