Стоящая здесь геометрическая прогрессия сходится, только если $e^{(\mu-\varepsilon_k)/T} < 1$. Так как это условие должно иметь место для всех ε_k (в том числе и для $\varepsilon_k = 0$), ясно, что во всяком случае должно быть

$$\mu < 0. \qquad (54,1)$$

Напомним в этой связи, что для больцмановского газа химический потенциал всегда имеет отрицательные (большие по абсолютной величине) значения, а для ферми-газа μ может быть как отрицательным, так и положительным.

Суммируя геометрическую прогрессию, получим

$$\Omega_k = T \ln\left(1 - e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}}\right).$$

Отсюда находим средние числа заполнения $\bar{n}_k = -\frac{\partial \Omega_k}{\partial \mu}$,

$$\bar{n}_k = \frac{1}{e^{(\varepsilon_k-\mu)/T} - 1}. \qquad (54,2)$$

Это и есть функция распределения идеального газа, подчиняющегося статистике Бозе (или, как говорят для краткости, *бозе-газа*). Она отличается от функции распределения Ферми знаком перед 1 в знаменателе. Как и последняя, при $\exp[(\mu-\varepsilon_k)/T] \ll 1$ она переходит, естественно, в функцию распределения Больцмана. Полное число частиц в газе выражается формулой

$$N = \sum_k \frac{1}{e^{(\varepsilon_k-\mu)/T} - 1}, \qquad (54,3)$$

а термодинамический потенциал Ω газа в целом получается суммированием Ω_k по всем квантовым состояниям:

$$\Omega = T \sum_k \ln\left(1 - e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}}\right). \qquad (54,4)$$

§ 55. Неравновесные ферми- и бозе-газы

Подобно тому, как это было сделано в § 40, можно вычислить энтропию также и неравновесных ферми- и бозе-газов, а из условия максимальности энтропии снова получить функции распределения Ферми и Бозе.

В случае Ферми в каждом из квантовых состояний может находиться не более одной частицы, но числа N_j не малы, а, вообще говоря, того же порядка величины, что и числа G_j (все обозначения — те же, что и в § 40).

Число возможных способов распределения N_j одинаковых частиц по G_j состояниям (не более чем по одной в каждом) есть не что иное, как число способов, которыми можно выбрать N_j из G_j состояний, т. е. число сочетаний из G_j элементов по N_j. Таким образом, имеем

$$\Delta\Gamma_j = \frac{G_j!}{N_j!\,(G_j-N_j)!}. \tag{55,1}$$

Логарифмируя это выражение и воспользовавшись для логарифмов всех трех факториалов формулой (40,3), найдем

$$S = \sum_j \{G_j \ln G_j - N_j \ln N_j - (G_j - N_j)\ln(G_j - N_j)\}. \tag{55,2}$$

Вводя снова средние числа заполнения квантовых состояний $\bar{n}_j = N_j/G_j$, получим окончательно следующее выражение для энтропии неравновесного ферми-газа:

$$S = -\sum_j G_j\,[\bar{n}_j \ln \bar{n}_j + (1-\bar{n}_j)\ln(1-\bar{n}_j)]. \tag{55,3}$$

Из условия максимальности этого выражения по уравнениям (40,8) легко найти, что равновесное распределение определяется формулой

$$\bar{n}_j = \frac{1}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_j}+1},$$

т. е., как и следовало, совпадает с распределением Ферми.

Наконец, в случае статистики Бозе в каждом квантовом состоянии может находиться любое число частиц, так что статистический вес $\Delta\Gamma_j$ есть число всех способов, которыми можно распределить N_j частиц по G_j состояниям. Это число равно[1])

$$\Delta\Gamma_j = \frac{(G_j+N_j-1)!}{(G_j-1)!\,N_j!}. \tag{55,4}$$

Логарифмируя это выражение и пренебрегая при этом единицей по сравнению с очень большими числами G_j+N_j и G_j, получим

$$S = \sum_j \{(G_j+N_j)\ln(G_j+N_j) - N_j \ln N_j - G_j \ln G_j\}. \tag{55,5}$$

---

[1]) Речь идет о числе способов размещения, скажем, N_j одинаковых шаров по G_j ящикам. Изобразим шары в виде ряда последовательно расположенных N_j точек; ящики перенумеруем и изобразим условно границы между ними G_j-1 вертикальными черточками, расположенными в ряду точек. Так, рисунок

$$\cdot\,|\,\cdots\,|\,|\,\cdots\cdot\,|\,\cdot\cdot$$

изображает 10 шаров, размещенных в пяти ящиках: 1 шар в первом ящике, 3 — во втором, 0 — в третьем, 4 — в четвертом и 2 — в пятом. Всего число мест (на которых находятся точки или черточки) в этом ряду есть G_j+N_j-1. Искомое число размещений шаров по ящикам есть число способов, которыми можно выбрать G_j-1 мест для черточек, т. е. число сочетаний из N_j+G_j-1 элементов по G_j-1, откуда и получается приведенная в тексте величина.

Вводя числа $\bar{n}_j$, напишем энтропию неравновесного бозе-газа в виде

$$S=\sum_j G_j\,[(1+\bar{n}_j)\ln(1+\bar{n}_j)-\bar{n}_j\ln\bar{n}_j]. \tag{55,6}$$

Легко убедиться в том, что условие максимальности этого выражения действительно приводит к распределению Бозе.

Обе формулы (55,2) и (55,5) для энтропии в предельном случае $N_j \ll G_j$ переходят, естественно, в больцмановскую формулу (40,4). В больцмановское выражение (40,2) переходят также и статистические веса (55,1) и (55,4) статистик Ферми и Бозе; для этого надо положить

$$G_j! \approx (G_j-N_j)!\,G_j^{N_j}, \qquad (G_j+N_j-1)! \approx (G_j-1)!\,G_j^{N_j}.$$

Необходимо, однако, иметь в виду, что такой переход в статистических весах означает пренебрежение в них членами порядка N_j^2/G_j, которые сами по себе, вообще говоря, не малы; но при логарифмировании эти члены дают в энтропии поправку малого относительного порядка N_j/G_j.

Наконец, выпишем формулу для энтропии бозе-газа в важном предельном случае, когда число частиц в каждом квантовом состоянии велико (так что $N_j \gg G_i$, $\bar{n}_j \gg 1$). Как известно из квантовой механики, этот случай соответствует классической волновой картине поля. Статистический вес (55,4) приобретает вид

$$\Delta\Gamma_j=\frac{N_j^{G_j-1}}{(G_j-1)!}, \tag{55,7}$$

а энтропия

$$S=\sum_j G_j \ln\frac{eN_j}{G_j}. \tag{55,8}$$

Мы используем эту формулу в дальнейшем, в § 71.

§ 56. Ферми- и бозе-газы элементарных частиц

Рассмотрим газ, состоящий из элементарных частиц, или частиц, которые в данных условиях могут рассматриваться как элементарные. Как уже было в свое время указано, к обычным атомным или молекулярным газам распределения Ферми или Бозе вообще не приходится применять, так как эти газы фактически всегда с достаточной точностью описываются распределением Больцмана.

Все выводимые в этом параграфе формулы имеют совершенно аналогичный вид для обеих статистик Ферми и Бозе, отличаясь лишь одним знаком. Ниже везде верхний знак соответствует статистике Ферми, а нижний — статистике Бозе.