одинаковы. Поэтому, выразив поправку в Ω через T и V (что можно сделать с той же точностью с помощью больцмановских выражений), мы получим поправку к свободной энергии:

$$F = F_{\text{больц}} \pm \frac{\pi^{3/2}}{2g} \frac{N^2\hbar^3}{VT^{1/2}m^{3/2}}. \tag{56.14}$$

Наконец, дифференцируя по объему, получим искомое уравнение состояния

$$PV = NT\left[1 \pm \frac{\pi^{3/2}}{2g} \frac{N\hbar^3}{V(mT)^{3/2}}\right]. \tag{56,15}$$

Условие малости поправочного члена в этой формуле совпадает, естественно, с условием (45,6) применимости статистики Больцмана. Таким образом, отклонения свойств идеального газа от классических, возникающие при понижении температуры при заданной плотности (как говорят, при начинающемся его *вырождении*), ведут в статистике Ферми к увеличению давления по сравнению с его значением в обычном газе; можно сказать, что квантовомеханические обменные эффекты приводят в этом случае к появлению некоторого дополнительного эффективного отталкивания между частицами.

В статистике же Бозе величина давления газа отклоняется в обратную сторону — в сторону уменьшения по сравнению с классическим значением; можно сказать, что здесь появляется некоторое эффективное притяжение между частицами.

§ 57. Вырожденный электронный газ

Важное принципиальное значение имеет изучение свойств ферми-газа при достаточно низких температурах. Как мы увидим ниже, температуры, о которых при этом идет речь, фактически могут еще быть, с других точек зрения, весьма высокими.

Имея в виду наиболее важные применения статистики Ферми, будем говорить ниже об электронном газе; соответственно этому полагаем $g = 2$ (спин $s = 1/2$).

Начнем с рассмотрения электронного газа при абсолютном нуле температуры (*полностью вырожденный* ферми-газ). В таком газе электроны будут распределены по различным квантовым состояниям таким образом, чтобы полная энергия газа имела наименьшее возможное значение. Поскольку в каждом квантовом состоянии может находиться не более одного электрона, то электроны заполнят все состояния с энергиями от наименьшей (равной нулю) до некоторой наибольшей, величина которой определяется числом электронов в газе.

С учетом двукратного ($g = 2$) спинового вырождения уровней, число квантовых состояний электрона, движущегося в объеме V

с абсолютной величиной импульса в интервале между p и $p+dp$, равно

$$2\,\frac{4\pi p^2 dp\cdot V}{(2\pi\hbar)^3}=V\,\frac{p^2\,dp}{\pi^2\hbar^3}. \tag{57,1}$$

Электроны заполняют все состояния с импульсами от нуля до граничного значения $p=p_F$; об этом значении говорят как о радиусе *ферми-сферы* в импульсном пространстве. Полное число электронов в этих состояниях

$$N=\frac{V}{\pi^2\hbar^3}\int\limits_0^{p_F} p^2\,dp=\frac{Vp_F^3}{3\pi^2\hbar^3},$$

откуда для граничного импульса имеем

$$p_F=(3\pi^2)^{1/3}\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}\hbar \tag{57,2}$$

и для граничной энергии

$$\varepsilon_F=\frac{p_F^2}{2m}=(3\pi^2)^{2/3}\,\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}. \tag{57,3}$$

Эта энергия имеет простой термодинамический смысл. В согласии со сказанным выше функция распределения Ферми по квантовым состояниям (с определенными значениями импульса $\mathbf{p}$ и проекции спина)

$$\bar{n}_{\mathbf{p}}=\frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/T}+1} \tag{57,4}$$

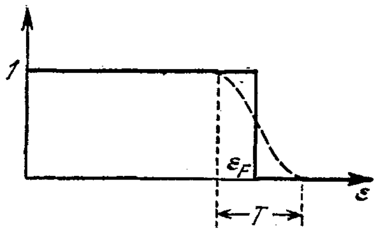

Рис. 6.

в пределе $T\to 0$ обращается в «ступенчатую» функцию: единица при $\varepsilon<\mu$ и нуль при $\varepsilon>\mu$ (на рис. 6 эта функция изображена сплошной линией). Отсюда видно, что химический потенциал газа при $T=0$ совпадает с граничной энергией электронов:

$$\mu=\varepsilon_F. \tag{57,5}$$

Полная энергия газа получится умножением числа состояний (57,1) на $p^2/2m$ и интегрированием по всем импульсам:

$$E=\frac{V}{2m\pi^2\hbar^3}\int\limits_0^{p_F} p^4\,dp=\frac{Vp_F^5}{10m\pi^2\hbar^3},$$

или, подставив (57,2):

$$E=\frac{3\,(3\pi^2)^{2/3}}{10}\,\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}N. \tag{57,6}$$

По общему соотношению (56,8) находим, наконец, уравнение состояния газа

$$P=\frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5}\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}. \tag{57,7}$$

Таким образом, давление ферми-газа при абсолютном нуле температуры пропорционально его плотности в степени 5/3.

Полученные формулы (57,6—7) применимы приближенно также и при температурах, достаточно близких (при данной плотности газа) к абсолютному нулю. Условие их применимости (условие «сильного вырождения» газа) требует, очевидно, малости T по сравнению с граничной энергией ε_F:

$$T\ll\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}. \tag{57,8}$$

Это условие, как и следовало ожидать, противоположно условию (45,6) применимости статистики Больцмана. Температуру $T_F \approx \varepsilon_F$ называют *температурой вырождения.*

Вырожденный электронный газ обладает своеобразной особенностью — он становится тем более идеальным, чем больше его плотность. В этом легко убедиться следующим образом.

Рассмотрим *плазму* — газ, состоящий из электронов и соответствующего количества положительно заряженных ядер, компенсирующих заряд электронов (газ из одних только электронов был бы, очевидно, вообще неустойчивым; выше мы не говорили о ядрах, поскольку вследствие предполагающейся идеальности наличие ядер не сказывается на термодинамических величинах электронного газа). Энергия кулонового взаимодействия электронов с ядрами (отнесенная к одному электрону) порядка величины Ze^2/a, где Ze — заряд ядра, а $a \sim (ZV/N)^{1/3}$ — среднее расстояние между электронами и ядрами. Условие идеальности газа заключается в требовании малости этой энергии по сравнению со средней кинетической энергией электронов, которая по порядку величины совпадает с граничной энергией ε_F. Неравенство

$$\frac{Ze^2}{a}\ll\varepsilon_F$$

после подстановки $a\sim(ZV/N)^{1/3}$ и выражения (57,3) для ε_F дает условие

$$\frac{N}{V}\gg\left(\frac{e^2m}{\hbar^2}\right)^3 Z^2. \tag{57,9}$$

Мы видим, что это условие выполняется тем лучше, чем больше плотность газа N/V[1]).

[1]) Температура вырождения, соответствующая плотности электронного газа, равной $(e^2m/\hbar^2)^3 Z^2$, составляет 40 $Z^{4/3}$ *эв* $\approx 0{,}5\cdot 10^6 Z^{4/3}$ градусов.

Задача

Определить число столкновений со стенкой в электронном газе при абсолютном нуле температуры.

Решение. Число электронов (в единице объема) с импульсами в интервале dp, направленными под углом к нормали к стенке в интервале $d\theta$, есть

$$\frac{2\cdot 2\pi \sin\theta\, d\theta\, p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Искомое число столкновений ν (отнесенное к 1 *см*^{2} стенки) получается умножением на $v\cos\theta$ ($v=p/m$) и интегрированием по $d\theta$ в пределах от 0 до $\pi/2$ и по dp — от 0 до p_F. В результате найдем

$$\nu=\frac{3\,(3\pi^2)^{1/3}}{16}\frac{\hbar}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{4/3}.$$

§ 58. Теплоемкость вырожденного электронного газа

При температурах, низких по сравнению с температурой вырождения T_F, функция распределения (57,4) имеет вид, изображенный на рис. 6 пунктирной линией: она заметно отлична от единицы или нуля лишь в узком интервале значений энергии ε, близких к граничной энергии ε_F. Ширина этой, как говорят, *зоны размытости* распределения Ферми — порядка величины T.

Выражения (57,6—7) представляют собой первые члены разложения соответствующих величин по степеням малого отношения T/T_F. Определим следующие члены этого разложения.

В формулу (56,6) входит интеграл вида

$$I=\int_0^\infty \frac{f(\varepsilon)\,d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/T}+1},$$

где $f(\varepsilon)$ — некоторая функция (такая, что интеграл сходится); в (56,6) $f(\varepsilon)=\varepsilon^{3/2}$. Преобразуем этот интеграл, сделав подстановку $\varepsilon-\mu=Tz$:

$$I=\int_{-\mu/T}^{\infty}\frac{f(\mu+Tz)}{e^z+1}\,T\,dz=T\int_0^{\mu/T}\frac{f(\mu-Tz)\,dz}{e^{-z}+1}+T\int_0^\infty\frac{f(\mu+Tz)\,dz}{e^z+1}.$$

В первом интеграле пишем

$$\frac{1}{e^{-z}+1}=1-\frac{1}{e^z+1}$$

и находим

$$I=\int_0^\mu f(\varepsilon)\,d\varepsilon-T\int_0^{\mu/T}\frac{f(\mu-Tz)\,dz}{e^z+1}+T\int_0^\infty\frac{f(\mu+Tz)\,dz}{e^z+1}.$$