Задача

Определить число столкновений со стенкой в электронном газе при абсолютном нуле температуры.

Решение. Число электронов (в единице объема) с импульсами в интервале dp, направленными под углом к нормали к стенке в интервале $d\theta$, есть

$$\frac{2\cdot 2\pi \sin\theta\, d\theta\, p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Искомое число столкновений ν (отнесенное к 1 *см*^{2} стенки) получается умножением на $v\cos\theta$ $(v=p/m)$ и интегрированием по $d\theta$ в пределах от 0 до $\pi/2$ и по dp — от 0 до p_F. В результате найдем

$$\nu=\frac{3(3\pi^2)^{1/3}}{16}\frac{\hbar}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{4/3}.$$

§ 58. Теплоемкость вырожденного электронного газа

При температурах, низких по сравнению с температурой вырождения T_F, функция распределения (57,4) имеет вид, изображенный на рис. 6 пунктирной линией: она заметно отлична от единицы или нуля лишь в узком интервале значений энергии ε, близких к граничной энергии ε_F. Ширина этой, как говорят, *зоны размытости* распределения Ферми — порядка величины T.

Выражения (57,6—7) представляют собой первые члены разложения соответствующих величин по степеням малого отношения T/T_F. Определим следующие члены этого разложения.

В формулу (56,6) входит интеграл вида

$$I=\int_0^\infty \frac{f(\varepsilon)\,d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/T}+1},$$

где $f(\varepsilon)$ — некоторая функция (такая, что интеграл сходится); в (56,6) $f(\varepsilon)=\varepsilon^{3/2}$. Преобразуем этот интеграл, сделав подстановку $\varepsilon-\mu=Tz$:

$$I=\int_{-\mu/T}^{\infty}\frac{f(\mu+Tz)}{e^z+1}T\,dz=T\int_0^{\mu/T}\frac{f(\mu-Tz)\,dz}{e^{-z}+1}+T\int_0^\infty\frac{f(\mu+Tz)\,dz}{e^z+1}.$$

В первом интеграле пишем

$$\frac{1}{e^{-z}+1}=1-\frac{1}{e^z+1}$$

и находим

$$I=\int_0^\mu f(\varepsilon)\,d\varepsilon-T\int_0^{\mu/T}\frac{f(\mu-Tz)\,dz}{e^z+1}+T\int_0^\infty\frac{f(\mu+Tz)\,dz}{e^z+1}.$$

Во втором интеграле заменяем верхний предел бесконечностью, имея в виду, что $\mu/T \gg 1$, а интеграл быстро сходится[1]). Таким образом, получим

$$I=\int_0^\mu f(\varepsilon)\,d\varepsilon+T\int_0^\infty \frac{f(\mu+Tz)-f(\mu-Tz)}{e^z+1}\,dz.$$

Разлагаем теперь числитель подынтегрального выражения во втором интеграле в ряд Тэйлора по степеням z и интегрируем почленно:

$$I=\int_0^\mu f(\varepsilon)\,d\varepsilon+2T^2f'(\mu)\int_0^\infty\frac{z\,dz}{e^z+1}+\frac{1}{3}T^4f'''(\mu)\int_0^\infty\frac{z^3\,dz}{e^z+1}+\ldots$$

Подставляя значения интегралов[2]), имеем окончательно

$$I=\int_0^\mu f(\varepsilon)\,d\varepsilon+\frac{\pi^2}{6}T^2f'(\mu)+\frac{7\pi^4}{360}T^4f'''(\mu)+\ldots \qquad (58,1)$$

---

[1]) Эта замена означает пренебрежение экспоненциально малыми членами. Надо иметь в виду, что получающееся ниже разложение (58,1) представляет собой асимптотический (а не сходящийся) ряд.

[2]) Интегралы такого типа вычисляются следующим образом:

$$\int_0^\infty\frac{z^{x-1}\,dz}{e^z+1}=\int_0^\infty z^{x-1}e^{-z}\sum_{n=0}^\infty(-)^n e^{-nz}\cdot dz=$$

$$=\Gamma(x)\sum_{n=1}^\infty(-)^{n+1}\frac{1}{n^x}=(1-2^{1-x})\,\Gamma(x)\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^x},$$

или

$$\int_0^\infty\frac{z^{x-1}\,dz}{e^z+1}=(1-2^{1-x})\,\Gamma(x)\,\zeta(x)\qquad(x>0),$$

где $\zeta(x)$ — ζ-функция Римана. При $x=1$ это выражение дает неопределенность; значение интеграла

$$\int_0^\infty\frac{dz}{e^z+1}=\ln 2.$$

При целом четном x ($x=2n$) ζ-функция выражается через так называемые числа Бернулли B_n, и получается

$$\int_0^\infty\frac{z^{2n-1}}{e^z+1}\,dz=\frac{2^{2n-1}-1}{2n}\pi^{2n}B_n.$$

Аналогичным образом вычисляются следующие интегралы:

Третий член разложения приведен для справок; здесь он нам не понадобится.

Полагая в формуле (58,1) $f=\varepsilon^{3/2}$ и подставляя в (56,6), получим искомый следующий член разложения потенциала Ω при низких температурах:

$$\Omega=\Omega_0-VT^2\frac{\sqrt{2\mu}\,m^{3/2}}{6\hbar^3}. \tag{58,2}$$

Посредством Ω_0 обозначена величина Ω при абсолютном нуле температуры.

Рассматривая второй член как малую добавку к Ω_0 и выражая в нем μ через T и V с помощью «нулевого приближения» (57,5), мы можем непосредственно написать выражение для свободной энергии (согласно теореме о малых добавках (24,16)):

$$F=F_0-\frac{\beta}{2}NT^2\left(\frac{V}{N}\right)^{2/3}, \tag{58,3}$$

где мы ввели для краткости обозначение

$$\beta=\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2/3}\frac{m}{\hbar^2}. \tag{58,4}$$

Отсюда находим энтропию газа

$$S=\beta NT\left(\frac{V}{N}\right)^{2/3}, \tag{58,5}$$

его теплоемкость[1])

$$C=\beta NT\left(\frac{V}{N}\right)^{2/3}, \tag{58,6}$$

$$\int_0^\infty\frac{z^{x-1}\,dz}{e^z-1}=\Gamma(x)\,\zeta(x)\qquad(x>1).$$

При целом четном $x=2n$ имеем

$$\int_0^\infty\frac{z^{2n-1}\,dz}{e^z-1}=\frac{(2\pi)^{2n}B_n}{4n}.$$

Приведем для справок несколько первых чисел Бернулли и несколько значений ζ-функций:

$$B_1=\frac{1}{6},\quad B_2=\frac{1}{30},\quad B_3=\frac{1}{42},\quad B_4=\frac{1}{30};$$

$$\zeta(3/2)=2{,}612,\quad \zeta(5/2)=1{,}341,\quad \zeta(3)=1{,}202,\quad \zeta(5)=1{,}037;$$

$$\Gamma(3/2)=\sqrt{\pi}/2\quad \Gamma(5/2)=3\sqrt{\pi}/4.$$

[1]) Мы не пишем индекса v или p у теплоемкости, так как в этом приближении C_v и C_p совпадают. Действительно, мы видели в § 23, что если S стремится при $T\to 0$ к нулю, как T^n, то разность C_p-C_v обращается в нуль, как T^{2n+1}; в данном случае, следовательно,

$$C_p-C_v\propto T^3.$$

и энергию

$$E = E_0 + \frac{\beta}{2} NT^2 \left(\frac{V}{N}\right)^{2/3} = E_0 \left[1 + 0{,}18 \left(\frac{mT}{\hbar^2}\right)^2 \left(\frac{V}{N}\right)^{4/3}\right]. \quad (58,7)$$

Таким образом, теплоемкость вырожденного ферми-газа при низких температурах пропорциональна первой степени температуры.

§ 59. Магнетизм электронного газа. Слабые поля

Намагниченность электронного газа в слабых магнитных полях складывается из двух независимых частей: из парамагнитной намагниченности, связанной с собственным (спиновым) магнитным моментом электронов (*парамагнетизм Паули*, *W. Pauli*, 1927) и из диамагнитной намагниченности, связанной с квантованием орбитального движения электронов в магнитном поле (*диамагнетизм Ландау*, 1930). Вычислим соответствующие магнитные восприимчивости, предполагая газ вырожденным: температура $T \ll \varepsilon_F$. Условие слабости магнитного поля означает, что должно быть (см. ниже) $\beta H \ll T$, где $\beta = |e|\hbar/2mc$ — магнетон Бора[1]).

Для вырожденного газа термодинамические вычисления удобнее производить в независимых переменных T, V, μ (вместо переменных T, V, N). Соответственно этому вместо формулы (52,1), использованной при вычислении магнитного момента больцмановского газа, здесь мы будем вычислять его как производную

$$\mathfrak{M} = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{H}}\right)_{T, V, \mu} \quad (59,1)$$

от термодинамического потенциала Ω.

Определим сначала парамагнитную часть восприимчивости. Дополнительная (спиновая) энергия электрона в магнитном поле равна $\pm\beta H$, где два знака отвечают двум значениям ($\pm 1/2$) проекции спина на направление поля. Статистическое распределение электронов в магнитном поле отличается, следовательно, от распределения в отсутствие поля заменой энергии $\varepsilon = p^2/2m$ на $\varepsilon = p^2/2m \pm \beta H$. Но поскольку ε входит в распределение в комбинации $\varepsilon - \mu$ с химическим потенциалом, то эта замена эквивалентна замене μ на $\mu \mp \beta H$. Поэтому потенциал Ω электронного газа в магнитном поле может быть представлен в виде

$$\Omega(\mu) = \frac{1}{2}\Omega_0(\mu + \beta H) + \frac{1}{2}\Omega_0(\mu - \beta H), \quad (59,2)$$

где $\Omega_0(\mu)$ — потенциал в отсутствие поля (аргументы T, V для

[1]) В обратном случае высоких температур ($T \gg \varepsilon_F$) электроны образуют больцмановский газ, и парамагнитная часть его восприимчивости, отнесенная к единице объема: $\chi_{\text{пара}} = N\beta^2/VT$ (формула (52,8) с $g = 2$, $J = 1/2$).