и энергию

$$E = E_0 + \frac{\beta}{2} NT^2 \left(\frac{V}{N}\right)^{2/3} = E_0 \left[1 + 0{,}18 \left(\frac{mT}{\hbar^2}\right)^2 \left(\frac{V}{N}\right)^{4/3}\right]. \quad (58{,}7)$$

Таким образом, теплоемкость вырожденного ферми-газа при низких температурах пропорциональна первой степени температуры.

§ 59. Магнетизм электронного газа. Слабые поля

Намагниченность электронного газа в слабых магнитных полях складывается из двух независимых частей: из парамагнитной намагниченности, связанной с собственным (спиновым) магнитным моментом электронов (*парамагнетизм Паули*, *W. Pauli*, 1927) и из диамагнитной намагниченности, связанной с квантованием орбитального движения электронов в магнитном поле (*диамагнетизм Ландау*, 1930). Вычислим соответствующие магнитные восприимчивости, предполагая газ вырожденным: температура $T \ll \varepsilon_F$. Условие слабости магнитного поля означает, что должно быть (см. ниже) $\beta H \ll T$, где $\beta = |e|\hbar/2mc$ — магнетон Бора[1]).

Для вырожденного газа термодинамические вычисления удобнее производить в независимых переменных T, V, μ (вместо переменных T, V, N). Соответственно этому вместо формулы (52,1), использованной при вычислении магнитного момента больцмановского газа, здесь мы будем вычислять его как производную

$$\mathfrak{M} = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{H}}\right)_{T,\,V,\,\mu} \quad (59{,}1)$$

от термодинамического потенциала Ω.

Определим сначала парамагнитную часть восприимчивости. Дополнительная (спиновая) энергия электрона в магнитном поле равна $\pm\beta H$, где два знака отвечают двум значениям ($\pm 1/2$) проекции спина на направление поля. Статистическое распределение электронов в магнитном поле отличается, следовательно, от распределения в отсутствие поля заменой энергии $\varepsilon = p^2/2m$ на $\varepsilon = p^2/2m \pm \beta H$. Но поскольку ε входит в распределение в комбинации $\varepsilon - \mu$ с химическим потенциалом, то эта замена эквивалентна замене μ на $\mu \mp \beta H$. Поэтому потенциал Ω электронного газа в магнитном поле может быть представлен в виде

$$\Omega(\mu) = \frac{1}{2}\Omega_0(\mu + \beta H) + \frac{1}{2}\Omega_0(\mu - \beta H), \quad (59{,}2)$$

где $\Omega_0(\mu)$ — потенциал в отсутствие поля (аргументы T, V для

---

[1]) В обратном случае высоких температур ($T \gg \varepsilon_F$) электроны образуют больцмановский газ, и парамагнитная часть его восприимчивости, отнесенная к единице объема: $\chi_{\text{пара}} = N\beta^2/VT$ (формула (52,8) с $g=2$, $J=1/2$).

краткости не выписываем); два члена в этой сумме отвечают совокупностям электронов с различными проекциями спина, а множители 1/2 учитывают уменьшение вдвое числа квантовых состояний электрона при фиксировании значения проекции его спина.

Произведя в (59,2) разложение по степеням βH, получим

$$\Omega(\mu) \approx \Omega_0(\mu) + \frac{1}{2}\beta^2 H^2 \frac{\partial^2 \Omega_0(\mu)}{\partial \mu^2}, \qquad (59,3)$$

откуда магнитный момент $\mathfrak{M} = -\mathbf{H}\beta^2 \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial \mu^2}$. Но производная $\partial\Omega_0/\partial\mu = -N$, так что парамагнитная восприимчивость, которую в этом параграфе относим к единице объема газа:

$$\chi_{\text{пара}} = -\frac{\beta^2}{V}\frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial \mu^2} = \frac{\beta^2}{V}\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{T,V}. \qquad (59,4)$$

Пренебрегая малым (при $T \ll \mu$) температурным эффектом, т. е. считая газ полностью вырожденным, имеем из (57,3)

$$N = V\frac{(2m\mu)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3},$$

и дифференцирование дает

$$\chi_{\text{пара}} = \frac{\beta^2 (2m)^{3/2}\sqrt{\mu}}{2\pi^2\hbar^3} = \frac{\beta^2 p_F m}{\pi^2\hbar^3}. \qquad (59,5)$$

Обратимся к вычислению диамагнитной восприимчивости. Уровни энергии орбитального движения электрона в магнитном поле даются выражением

$$\varepsilon = \frac{p_z^2}{2m} + (2n+1)\beta H, \qquad (59,6)$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$, а p_z—импульс в направлении поля—пробегает непрерывный ряд значений от $-\infty$ до ∞ (см. III, § 112). При этом число состояний в интервале dp_z при каждом заданном значении n есть

$$2\frac{V|e|H}{(2\pi\hbar)^2 c}dp_z, \qquad (59,7)$$

где множитель 2 учитывает два направления спина. Выражение (53,4) для потенциала Ω принимает вид

$$\Omega = 2\beta H \sum_{n=0}^{\infty} f[\mu - (2n+1)\beta H], \qquad (59,8)$$

$$f(\mu) = -\frac{TmV}{2\pi^2\hbar^3}\int_{-\infty}^{\infty} \ln\left[1 + \exp\left(\frac{\mu}{T} - \frac{p_z^2}{2mT}\right)\right]dp_z. \qquad (59,9)$$

Сумму (59,8) можно вычислить с требуемой точностью с помощью формулы[1])

$$\sum_{n=0}^{\infty} F\left(n+\frac{1}{2}\right) \approx \int_0^{\infty} F(x)\,dx + \frac{1}{24}F'(0). \tag{59,10}$$

Условие применимости этой формулы состоит в малости относительного изменения функции F на одном шаге ($n \to n+1$). В применении к функции (59,9) оно сводится к требованию $\beta H \ll T$[2]).

Применив (59,10) к сумме (59,8), получим

$$\Omega = 2\beta H \int_0^{\infty} f(\mu - 2\beta H x)\,dx + \frac{2\beta H}{24}\frac{\partial f(\mu - 2n\beta H)}{\partial n}\Big|_{n=0} = \int_{-\infty}^{\mu} f(x)\,dx - \frac{(2\beta H)^2}{24}\frac{\partial f(\mu)}{\partial \mu}.$$

Первый член не содержит H, т. е. представляет собой потенциал $\Omega_0(\mu)$ газа в отсутствие поля. Таким образом,

$$\Omega = \Omega_0(\mu) - \frac{1}{6}\beta^2 H^2 \frac{\partial^2 \Omega_0(\mu)}{\partial \mu^2}, \tag{59,11}$$

и отсюда восприимчивость[3])

$$\chi_{\text{диа}} = \frac{\beta^2}{3V}\frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial \mu^2} = -\frac{1}{3}\chi_{\text{пара}}. \tag{59,12}$$

В целом газ парамагнитен с восприимчивостью $\chi = 2\chi_{\text{пара}}/3$. Мы произвели здесь вычисление обеих ее частей по отдельности с целью уяснения их происхождения. Разумеется, можно было бы вычислять также и сразу суммарную восприимчивость χ. Для этого надо было бы писать уровни энергии электронов

---

[1]) Согласно известной формуле суммирования Эйлера—Маклорена

$$\frac{1}{2}F(a) + \sum_{n=1}^{\infty} F(a+n) \approx \int_a^{\infty} F(x)\,dx - \frac{1}{12}F'(a). \tag{59,10a}$$

Формула (59,10) получится отсюда, если положить $a = 1/2$ и представить функцию $F(x)$ в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1/2$ в виде $F(x) \approx F(0) + xF'(0)$.

[2]) В противном случае условие нарушается в «опасной» области значений n, для которых разность $\mu - (2n+1)\beta H$ близка к нулю. Эта область приводит (см. следующий параграф) к появлению в Ω быстро осциллирующих (как функция от H) членов. Эти члены исчезнут, если произвести усреднение ряда (59,8) по некоторому интервалу ΔH такому, что изменение аргумента $\mu - 2\beta n H$ (вблизи точки, где $\mu - 2\beta n H \approx 0$) будет существенно больше, чем разность его двух соседних значений: $\beta H \ll n\beta\,\Delta H \sim \mu\,\Delta H/H$ или $\Delta H/H \gg \beta H/\mu$. После этого формула (59,10) станет вновь применима, и получающийся с ее помощью результат будет ограничен лишь условием $\beta H \ll \mu$.

[3]) Отметим, что это соотношение справедливо при любой степени вырождения газа.

в виде $\varepsilon = p_z^2/2m + (2n+1)\beta H \pm \beta H$, получающемся прибавлением к (59,6) спиновой магнитной энергии $\pm\beta H$. Эту совокупность значений ε можно представить и как

$$\varepsilon = \frac{p_z^2}{2m} + 2n\beta H, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{59,13}$$

причем каждое значение с $n \neq 0$ встречается дважды, а с $n = 0$ один раз; другими словами, плотность числа состояний с $n \neq 0$ дается той же формулой (59,7), а для $n = 0$ она вдвое меньше. Потенциал Ω определится тогда суммой

$$\Omega = 2\beta H \left\{ \frac{1}{2} f(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} f(\mu - 2\beta H n) \right\}, \tag{59,14}$$

а для ее вычисления надо воспользоваться формулой [1])

$$\frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) = \int_0^{\infty} F(x)\,dx - \frac{1}{12} F'(0). \tag{59,15}$$

§ 60. Магнетизм электронного газа. Сильные поля

Рассмотрим теперь поля, для которых значение βH, по-прежнему малое по сравнению с μ, уже не должно быть малым по сравнению с T:

$$T \lesssim \beta H \ll \mu. \tag{60.1}$$

В этих условиях эффекты квантования орбитального движения и спиновые эффекты уже не могут быть отделены друг от друга и должны учитываться одновременно; другими словами, при вычислении Ω надо исходить из выражения (59,14).

Мы увидим, что намагниченность электронного газа при $\beta H \gtrsim T$ содержит часть, которая, как функция H, осциллирует с большой амплитудой; именно эта осциллирующая часть намагниченности и будет интересовать нас здесь.

Для выделения из термодинамических величин их осциллирующих частей целесообразно преобразовать сумму (59,14) с помощью формулы Пуассона [2]):

$$\frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) = \int_0^{\infty} F(x)\,dx + 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} F(x) e^{2\pi i k x}\,dx, \tag{60,2}$$

---

[1]) Она получается из формулы Эйлера—Маклорена, если положить в ней $a = 0$.

[2]) Эта формула следует из равенства

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x};$$

сумма δ-функций в левой стороне этого равенства представляет собой периодическую функцию переменной x с периодом 1, а сумма в правой стороне есть