в виде $\varepsilon = p_z^2/2m + (2n+1)\beta H \pm \beta H$, получающемся прибавлением к (59,6) спиновой магнитной энергии $\pm\beta H$. Эту совокупность значений $\varepsilon$ можно представить и как

$$\varepsilon = \frac{p_z^2}{2m} + 2n\beta H, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{59,13}$$

причем каждое значение с $n \neq 0$ встречается дважды, а с $n = 0$ один раз; другими словами, плотность числа состояний с $n \neq 0$ дается той же формулой (59,7), а для $n = 0$ она вдвое меньше. Потенциал $\Omega$ определится тогда суммой

$$\Omega = 2\beta H \left\{ \frac{1}{2} f(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} f(\mu - 2\beta H n) \right\}, \tag{59,14}$$

а для ее вычисления надо воспользоваться формулой[1])

$$\frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) = \int_0^{\infty} F(x)\,dx - \frac{1}{12} F'(0). \tag{59,15}$$

## § 60. Магнетизм электронного газа. Сильные поля

Рассмотрим теперь поля, для которых значение $\beta H$, по-прежнему малое по сравнению с $\mu$, уже не должно быть малым по сравнению с $T$:

$$T \leqslant \beta H \ll \mu. \tag{60.1}$$

В этих условиях эффекты квантования орбитального движения и спиновые эффекты уже не могут быть отделены друг от друга и должны учитываться одновременно; другими словами, при вычислении $\Omega$ надо исходить из выражения (59,14).

Мы увидим, что намагниченность электронного газа при $\beta H \gtrsim T$ содержит часть, которая, как функция $H$, осциллирует с большой амплитудой; именно эта осциллирующая часть намагниченности и будет интересовать нас здесь.

Для выделения из термодинамических величин их осциллирующих частей целесообразно преобразовать сумму (59,14) с помощью формулы Пуассона[2]):

$$\frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) = \int_0^{\infty} F(x)\,dx + 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} F(x) e^{2\pi i k x} dx, \tag{60,2}$$

[1]) Она получается из формулы Эйлера—Маклорена, если положить в ней $a = 0$.

[2]) Эта формула следует из равенства

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x};$$

сумма $\delta$-функций в левой стороне этого равенства представляет собой периодическую функцию переменной $x$ с периодом 1, а сумма в правой стороне есть после чего она принимает вид

$$\Omega=\Omega_0(\mu)+\frac{TmV}{\pi^2\hbar^3}\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} I_k, \qquad (60,3)$$

где

$$I_k=-2\beta H\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\ln\left[1+\exp\left(\frac{\mu}{T}-\frac{p_z^2}{2mT}-\frac{2x\beta H}{T}\right)\right]e^{2\pi ikx}\,dx\,dp_z, \qquad (60,4)$$

а $\Omega_0(\mu)$ — термодинамический потенциал в отсутствие поля.

Произведем в интегралах $I_k$ замену переменной $x$ на $\varepsilon=p_z^2/2m+$ $+2x\beta H$. Для интересующей нас осциллирующей части интегралов (которую обозначим через $\tilde I_k$) получим

$$\tilde I_k=-\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\ln\left[1+\exp\left(\frac{\mu-\varepsilon}{T}\right)\right]\exp\left(\frac{i\pi k\varepsilon}{\beta H}\right)\exp\left(-\frac{i\pi k p_z^2}{2m\beta H}\right)d\varepsilon\,dp_z.$$

В интеграле по $p_z$ существенны значения $p_z^2/2m\sim\beta H$. Осциллирующая же часть интеграла возникает от области значений $\varepsilon$ вблизи $\mu$ (см. ниже); поэтому нижний предел интегрирования по $\varepsilon$ заменен нулем (вместо $p_z^2/2m$).

Интегрирование по $p_z$ отделяется и осуществляется формулой [1])

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha p^2}dp=e^{-i\pi/4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

после чего остается

$$\tilde I_k=-e^{-i\pi/4}\sqrt{\frac{2m\beta H}{k}}\int_0^{\infty}\ln\left[1+e^{(\mu-\varepsilon)/T}\right]e^{i\pi k\varepsilon/\beta H}\,d\varepsilon.$$

В этом интеграле производим дважды интегрирование по частям, а в остающемся интеграле производим замену переменной

---

разложение этой функции в ряд Фурье. Умножив равенство на произвольную функцию $F(x)$ и проинтегрировав его затем по $x$ от 0 до $\infty$, получим (60,2) (при этом интеграл $\int_0^{\infty}F(x)\,\delta(x)\,dx$ — член суммы с $n=0$, распространенный лишь по области с одной из сторон от точки $x=0$, дает $F(0)/2$).

[1]) Она получается путем поворота пути интегрирования в плоскости комплексной переменной $p$: полагаем $p=e^{-i\pi/4}u$ и интегрируем по вещественным значениям $u$ от $-\infty$ до $\infty$.

$(\varepsilon-\mu)/T=\xi$. Опустив неосциллирующую часть, получим

$$\tilde{I}_k=\frac{\sqrt{2m}\,(\beta H)^{5/2}}{T\pi^2 k^{5/2}}\exp\left(\frac{i\pi k\mu}{\beta H}-\frac{i\pi}{4}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\xi}}{(e^{\xi}+1)^2}\exp\left(\frac{i\pi kT}{\beta H}\xi\right)d\xi.$$

Нижний предел интеграла по $\xi$, равный $-\mu/T$, в силу условия $\mu\gg T$ заменен на $-\infty$. При $\beta H\gtrsim T$ определяющую роль в интеграле играет область $\xi\sim 1$, т. е. окрестность значений $\varepsilon$ вокруг $\mu$ $(\varepsilon-\mu\sim T)$. Интеграл вычисляется по формуле[1])

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\xi}}{(e^{\xi}+1)^2}e^{i\alpha\xi}d\xi=\frac{\pi\alpha}{\operatorname{sh}\pi\alpha}.$$

Окончательно для осциллирующей части $\Omega$ находим

$$\tilde{\Omega}=\frac{\sqrt{2}(m\beta H)^{3/2}TV}{\pi^2\hbar^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi\mu}{\beta H}k-\frac{\pi}{4}\right)}{k^{3/2}\operatorname{sh}(\pi^2kT/\beta H)}. \tag{60,5}$$

При вычислении магнитного момента как производной от выражения (60,5), дифференцированию должны подвергаться лишь наиболее быстро меняющиеся множители—косинусы в числителях членов суммы. Это дает

$$\tilde{\mathfrak{M}}=-\frac{\sqrt{2\beta}\,m^{3/2}\mu TV}{\pi\hbar^3\sqrt{H}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi\mu}{\beta H}k-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{k}\operatorname{sh}(\pi^2kT/\beta H)} \tag{60,6}$$

(*Л. Д. Ландау*, 1939). Эта функция осциллирует с большой частотой. Ее «период» по переменной $1/H$ есть постоянная величина

$$\Delta\frac{1}{H}=\frac{2\beta}{\mu}, \tag{60,7}$$

не зависящая от температуры. При этом $\Delta H/H\sim\beta H/\mu\ll 1$[2]).

При $\beta H\sim T$ амплитуда колебаний магнитного момента $\tilde{\mathfrak{M}}\sim V\mu H^{1/2}(m\beta)^{3/2}\hbar^{-3}$. «Монотонная» же часть намагниченности (обозначим ее $\bar{\mathfrak{M}}$), определяющаяся по вычисленной в предыдущем

---

[1]) Подстановкой $(e^{\xi}+1)^{-1}=u$ интеграл приводится к B-интегралу Эйлера:

$$\int\limits_0^1(1-u)^{i\alpha}u^{-i\alpha}\,du=\Gamma(1+i\alpha)\,\Gamma(1-i\alpha)/\Gamma(2)$$

и по формуле

$$\Gamma(1-z)\,\Gamma(1+z)=\pi z/\sin\pi z$$

получается указанный в тексте результат.

[2]) Эффект осцилляций намагниченности был качественно предсказан *Ландау* (1930). Это явление в металлах называют *эффектом де-Гааза—ван-Альфена*.

параграфе восприимчивости: $\bar{\mathfrak{M}} \sim V\mu^{1/2}Hm^{3/2}\beta^2\hbar^{-3}$. Поэтому $\tilde{\mathfrak{M}}/\bar{\mathfrak{M}} \sim (\mu/\beta H)^{1/2}$ — амплитуда осциллирующей части велика по сравнению с монотонной. Напротив, при $\beta H \ll T$ эта амплитуда экспоненциально убывает (как $\exp(-\pi^2 T/\beta H)$) и становится пренебрежимо малой.

## § 61. Релятивистский вырожденный электронный газ

По мере сжатия газа средняя энергия электронов увеличивается (растет $\varepsilon_F$); когда она становится сравнимой с $mc^2$, делаются существенными релятивистские эффекты. Мы рассмотрим здесь подробно полностью вырожденный ультрарелятивистский электронный газ, энергия частиц которого велика по сравнению с $mc^2$. Как известно, в этом случае энергия частицы связана с ее импульсом соотношением

$$\varepsilon = cp. \tag{61,1}$$

Для числа квантовых состояний, а потому и для граничного импульса имеем прежние формулы (57,1—2). Граничная же энергия (т. е. химический потенциал газа) равна теперь

$$\varepsilon_F = cp_F = (3\pi^2)^{1/3}\hbar c\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}. \tag{61,2}$$

Полная энергия газа

$$E = \frac{cV}{\pi^2\hbar^3}\int\limits_0^{p_F} p^3\,dp = V\frac{cp_F^4}{4\pi^2\hbar^3}$$

или

$$E = \frac{3(3\pi^2)^{1/3}}{4}\hbar cN\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}. \tag{61,3}$$

Давление газа можно получить дифференцированием энергии по объему (при постоянной, равной нулю,— энтропии). Это дает

$$P = \frac{E}{3V} = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4}\hbar c\left(\frac{N}{V}\right)^{4/3}. \tag{61,4}$$

Давление ультрарелятивистского электронного газа оказывается пропорциональным его плотности в степени 4/3.

Необходимо указать, что соотношение

$$PV = \frac{E}{3} \tag{61,5}$$

имеет место для ультрарелятивистского газа в действительности не только при абсолютном нуле, но и при всех температурах. В этом легко убедиться в точности тем же способом, каким было