параграфе восприимчивости: $\overline{\mathfrak{M}} \sim V\mu^{1/2}Hm^{3/2}\beta^2\hbar^{-3}$. Поэтому $\tilde{\mathfrak{M}}/\overline{\mathfrak{M}} \sim (\mu/\beta H)^{1/2}$ — амплитуда осциллирующей части велика по сравнению с монотонной. Напротив, при $\beta H \ll T$ эта амплитуда экспоненциально убывает (как $\exp(-\pi^2 T/\beta H)$) и становится пренебрежимо малой.

## § 61. Релятивистский вырожденный электронный газ

По мере сжатия газа средняя энергия электронов увеличивается (растет $\varepsilon_F$); когда она становится сравнимой с $mc^2$, делаются существенными релятивистские эффекты. Мы рассмотрим здесь подробно полностью вырожденный ультрарелятивистский электронный газ, энергия частиц которого велика по сравнению с $mc^2$. Как известно, в этом случае энергия частицы связана с ее импульсом соотношением

$$\varepsilon = cp. \tag{61,1}$$

Для числа квантовых состояний, а потому и для граничного импульса имеем прежние формулы (57,1—2). Граничная же энергия (т. е. химический потенциал газа) равна теперь

$$\varepsilon_F = cp_F = (3\pi^2)^{1/3}\hbar c\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}. \tag{61,2}$$

Полная энергия газа

$$E = \frac{cV}{\pi^2\hbar^3}\int\limits_0^{p_F} p^3\,dp = V\frac{cp_F^4}{4\pi^2\hbar^3}$$

или

$$E = \frac{3(3\pi^2)^{1/3}}{4}\hbar cN\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}. \tag{61,3}$$

Давление газа можно получить дифференцированием энергии по объему (при постоянной, равной нулю,— энтропии). Это дает

$$P = \frac{E}{3V} = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4}\hbar c\left(\frac{N}{V}\right)^{4/3}. \tag{61,4}$$

Давление ультрарелятивистского электронного газа оказывается пропорциональным его плотности в степени 4/3.

Необходимо указать, что соотношение

$$PV = \frac{E}{3} \tag{61,5}$$

имеет место для ультрарелятивистского газа в действительности не только при абсолютном нуле, но и при всех температурах. В этом легко убедиться в точности тем же способом, каким было выведено соотношение (56,8), если только пользоваться для энергии $\varepsilon$ выражением $\varepsilon = cp$ вместо $\varepsilon = p^2/2m$. Действительно, при $\varepsilon = cp$ из формулы (53,4) получается

$$\Omega = -\frac{TV}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_0^\infty \varepsilon^2 \ln\left(1 + e^{\frac{\mu-\varepsilon}{T}}\right) d\varepsilon,$$

откуда интегрированием по частям найдем

$$\Omega = -\frac{V}{3\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^3 \, d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} + 1} = -\frac{E}{3}. \qquad (61,6)$$

Таким образом, для ультрарелятивистского ферми-газа достигается то предельное значение, которое вообще может иметь (при данном $E$) давление какого-либо макроскопического тела (см. § 27).

Введя переменную интегрирования $\varepsilon/T = z$, напишем:

$$\Omega = -\frac{VT^4}{3\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{z^3 \, dz}{e^{z-(\mu/T)} + 1}.$$

Отсюда видно, что

$$\Omega = VT^4 f\left(\frac{\mu}{T}\right). \qquad (61,7)$$

Тем же способом, как это было сделано в § 56, найдем отсюда, что при адиабатическом процессе объем, давление и температура ультрарелятивистского ферми-газа связаны соотношениями

$$PV^{4/3} = \text{const}, \qquad VT^3 = \text{const}, \qquad \frac{T^4}{P} = \text{const}. \qquad (61,8)$$

Они совпадают с обычным уравнением адиабаты Пуассона с $\gamma = 4/3$; подчеркнем, однако, что $\gamma$ отнюдь не является здесь отношением теплоемкостей газа.

### Задачи

1. Определить число столкновений со стенкой в ультрарелятивистском полностью вырожденном электронном газе.

Решение. Вычисление производится так же, как в задаче к § 57, причем надо иметь в виду, что скорость электронов $v \approx c$. В результате получается

$$\nu = \frac{c}{4} \frac{N}{V}.$$

2. Определить теплоемкость вырожденного ультрарелятивистского электронного газа.

Решение. Применяя формулу (58,1) к интегралу в (61,6), найдем

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{(\mu T)^2}{6 (c\hbar)^3} V.$$

Отсюда энтропия

$$S = \frac{\mu^2}{3(c\hbar)^3} VT = N \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{3c\hbar} T \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}$$

и теплоемкость

$$C = N \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{3c\hbar} \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} T.$$

3. Определить уравнение состояния релятивистского полностью вырожденного электронного газа (энергия электрона связана с импульсом посредством $\varepsilon^2 = c^2p^2 + m^2c^4$).

Решение. Для числа состояний и граничного импульса имеем прежние формулы (57,1—2), а полная энергия равна

$$E = \frac{Vc}{\pi^2\hbar^3} \int\limits_0^{p_F} p^2 \sqrt{m^2c^2 + p^2} \cdot dp,$$

откуда

$$E = \frac{cV}{8\pi^2\hbar^3} \left\{ p_F (2p_F^2 + m^2c^2) \sqrt{p_F^2 + m^2c^2} - (mc)^4 \operatorname{Arsh} \frac{p_F}{mc} \right\}.$$

Для давления $P = -(\partial E/\partial V)_{S=0}$ имеем

$$P = \frac{c}{8\pi^2\hbar^3} \left\{ p_F \left( \frac{2}{3} p_F^2 - m^2c^2 \right) \sqrt{p_F^2 + m^2c^2} + (mc)^4 \operatorname{Arsh} \frac{p_F}{mc} \right\}.$$

Полученные формулы удобно представить в параметрическом виде, введя в качестве параметра величину

$$\xi = 4 \operatorname{Arsh} \frac{p_F}{mc}.$$

Тогда получим

$$\frac{N}{V} = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 \frac{1}{3\pi^2} \operatorname{sh}^3 \frac{\xi}{4},$$

$$P = \frac{m^4c^5}{32\pi^2\hbar^3} \left( \frac{1}{3} \operatorname{sh} \xi - \frac{8}{3} \operatorname{sh} \frac{\xi}{2} + \xi \right),$$

$$\frac{E}{V} = \frac{m^4c^5}{32\pi^2\hbar^3} (\operatorname{sh} \xi - \xi).$$

Химический потенциал газа $\mu$ (включающий в себя энергию покоя частицы) совпадает с предельной энергией $\varepsilon_F = \varepsilon(p_F)$. Он связан с плотностью соотношением

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{3\pi^2\hbar^3} \left( \frac{\mu^2}{c^2} - m^2c^2 \right)^{3/2}.$$

## § 62. Вырожденный бозе-газ

При низких температурах свойства бозе-газа не имеют ничего общего со свойствами ферми-газа. Это заранее очевидно из того, что у бозе-газа состоянием наименьшей энергии, в котором газ находится при $T = 0$, должно быть состояние с $E = 0$ (все