Отсюда энтропия

$$S=\frac{\mu^2}{3(c\hbar)^3}VT=N\frac{(3\pi^2)^{2/3}}{3c\hbar}T\left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}$$

и теплоемкость

$$C=N\frac{(3\pi^2)^{2/3}}{3c\hbar}\left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}T.$$

3. Определить уравнение состояния релятивистского полностью вырожденного электронного газа (энергия электрона связана с импульсом посредством $\varepsilon^2=c^2p^2+m^2c^4$).

Решение. Для числа состояний и граничного импульса имеем прежние формулы (57,1—2), а полная энергия равна

$$E=\frac{Vc}{\pi^2\hbar^3}\int_0^{p_F}p^2\sqrt{m^2c^2+p^2}\cdot dp,$$

откуда

$$E=\frac{cV}{8\pi^2\hbar^3}\left\{p_F(2p_F^2+m^2c^2)\sqrt{p_F^2+m^2c^2}-(mc)^4\operatorname{Arsh}\frac{p_F}{mc}\right\}.$$

Для давления $P=-(\partial E/\partial V)_{S=0}$ имеем

$$P=\frac{c}{8\pi^2\hbar^3}\left\{p_F\left(\frac{2}{3}p_F^2-m^2c^2\right)\sqrt{p_F^2+m^2c^2}+(mc)^4\operatorname{Arsh}\frac{p_F}{mc}\right\}.$$

Полученные формулы удобно представить в параметрическом виде, введя в качестве параметра величину

$$\xi=4\operatorname{Arsh}\frac{p_F}{mc}.$$

Тогда получим

$$\frac{N}{V}=\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3\frac{1}{3\pi^2}\operatorname{sh}^3\frac{\xi}{4},$$

$$P=\frac{m^4c^5}{32\pi^2\hbar^3}\left(\frac{1}{3}\operatorname{sh}\xi-\frac{8}{3}\operatorname{sh}\frac{\xi}{2}+\xi\right),$$

$$\frac{E}{V}=\frac{m^4c^5}{32\pi^2\hbar^3}(\operatorname{sh}\xi-\xi).$$

Химический потенциал газа μ (включающий в себя энергию покоя частицы) совпадает с предельной энергией $\varepsilon_F=\varepsilon(p_F)$. Он связан с плотностью соотношением

$$\frac{N}{V}=\frac{1}{3\pi^2\hbar^3}\left(\frac{\mu^2}{c^2}-m^2c^2\right)^{3/2}.$$

§ 62. Вырожденный бозе-газ

При низких температурах свойства бозе-газа не имеют ничего общего со свойствами ферми-газа. Это заранее очевидно из того, что у бозе-газа состоянием наименьшей энергии, в котором газ находится при $T=0$, должно быть состояние с $E=0$ (все частицы в квантовом состоянии с $\varepsilon=0$), между тем как ферми-газ при абсолютном нуле обладает отличной от нуля энергией.

Если при заданной плотности N/V газа понижать его температуру, то химический потенциал μ, определяемый уравнением (56,5) (с нижним знаком), будет увеличиваться, т. е., будучи отрицательным, уменьшаться по абсолютной величине. Он достигнет значения $\mu=0$ при температуре, определяемой равенством

$$\frac{N}{V}=\frac{g(mT)^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3}\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{z}\,dz}{e^z-1}. \tag{62,1}$$

Входящий сюда интеграл выражается через ζ-функцию (см. примечание на стр. 191); обозначая искомую температуру посредством T_0, получим

$$T_0=\frac{3,31}{g^{2/3}}\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}. \tag{62,2}$$

При $T<T_0$ уравнение (56,5) не имеет отрицательных решений, между тем как в статистике Бозе химический потенциал должен быть отрицательным при всех температурах.

Это кажущееся противоречие связано с тем, что в данных условиях не законен переход от суммирования (в формуле (54,3)) к интегрированию (в формуле (56,5)). Действительно, при этом переходе первый член суммы (с $\varepsilon_k=0$) умножается на $\sqrt{\varepsilon}=0$, т. е. выпадает из суммы. Между тем при понижении температуры частицы должны скапливаться именно в этом состоянии с наименьшей энергией, пока при $T=0$ туда не попадут все они. Математически это обстоятельство проявляется в том, что в сумме (54,3) при переходе к пределу $\mu\to 0$ сумма всех членов ряда, за исключением первого, стремится к конечному пределу (определяемому интегралом (56,5)), а первый член (с $\varepsilon_k=0$) стремится к бесконечности. Устремляя μ не к нулю, а к некоторому малому конечному значению, можно, следовательно, придать указанному первому члену суммы требуемое конечное значение.

Поэтому в действительности при $T<T_0$ дело будет обстоять следующим образом. Частицы с энергией $\varepsilon>0$ распределены по формуле (56,4) с $\mu=0$:

$$dN_\varepsilon=\frac{gm^{3/2}V}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3}\frac{\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon}{e^{\varepsilon/T}-1}. \tag{62,3}$$

Полное число частиц с энергиями $\varepsilon>0$ будет, следовательно,

$$N_{\varepsilon>0}=\int dN_\varepsilon=\frac{gV(mT)^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3}\int\limits_0^\infty\frac{\sqrt{z}\,dz}{e^z-1}=N\left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}.$$

Остальные

$$N_{\varepsilon=0}=N\left[1-\left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}\right] \tag{62,4}$$

частиц находятся в низшем состоянии, т. е. имеют энергию $\varepsilon=0$ [1]). Энергия газа при $T<T_0$ определяется, конечно, только теми частицами, которые имеют $\varepsilon>0$; полагая в (56,7) $\mu=0$, имеем

$$E=\frac{gV(mT)^{3/2}T}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3}\int\limits_0^\infty\frac{z^{3/2}dz}{e^z-1}.$$

Этот интеграл приводится к $\zeta(5/2)$ (см. примечание на стр. 191) и получается

$$E=0{,}770NT\left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}=0{,}128g\frac{m^{3/2}T^{5/2}}{\hbar^3}V. \tag{62,5}$$

Отсюда теплоемкость

$$C_v=\frac{5E}{2T}, \tag{62,6}$$

т. е. теплоемкость пропорциональна $T^{3/2}$. Интегрируя теплоемкость, находим энтропию:

$$S=\frac{5E}{3T}, \tag{62,7}$$

и свободную энергию $F=E-TS$:

$$F=-\frac{2}{3}E. \tag{62,8}$$

Последний результат вполне естествен, так как при $\mu=0$

$$F=\Phi-PV=N\mu+\Omega=\Omega.$$

Для давления $P=-(\partial F/\partial V)_T$ имеем

$$P=0{,}0851g\frac{m^{3/2}T^{5/2}}{\hbar^3}. \tag{62,9}$$

Мы видим, что при $T<T_0$ давление пропорционально $T^{5/2}$ и не зависит вовсе от объема. Это обстоятельство — естественное следствие того, что частицы, находящиеся в состоянии с $\varepsilon=0$, не обладая импульсом, не дают никакого вклада в давление.

В самой точке $T=T_0$ все перечисленные термодинамические величины непрерывны. Можно, однако, показать, что производная

---

[1]) Явление накапливания частиц в состоянии с $\varepsilon=0$ называют *конденсацией Бозе—Эйнштейна*. Подчеркнем, что речь может при этом идти разве что о «конденсации в импульсном пространстве», никакой реальной конденсации в газе, конечно, не происходит.

от теплоемкости по температуре испытывает в этой точке скачок (см. задачу к этому параграфу). Кривая самой теплоемкости как функции от температуры имеет в точке $T=T_0$ излом, причем в этой точке теплоемкость максимальна $\left(\text{и равна } 1{,}28\cdot\frac{3}{2}N\right)$[1].

Задача

Определить скачок производной $(\partial C_v/\partial T)_V$ в точке $T=T_0$.

Решение. Для решения задачи надо определить энергию газа при малых положительных $T-T_0$. Переписываем равенство (56,5) тождественно в виде

$$N=N_0(T)+\frac{gVm^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3}\int\limits_0^\infty\left[\frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/T}-1}-\frac{1}{e^{\varepsilon/T}-1}\right]\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon,$$

где функция $N_0(T)$ определяется равенством (62,1). Разлагаем подынтегральное выражение, имея в виду, что μ мало вблизи точки $T=T_0$, а поэтому в интеграле существенна область малых ε, и находим, что стоящий здесь интеграл равен

$$T\mu\int\limits_0^\infty\frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}\,(\varepsilon+|\mu|)}=-\pi T\sqrt{|\mu|}. \qquad (1)$$

Подставляя это значение и выражая затем μ через $N-N_0$, получим

$$-\mu=\frac{2\pi^2\hbar^6}{g^2m^3}\left(\frac{N_0-N}{TV}\right)^2.$$

С той же точностью пишем теперь:

$$\frac{\partial E}{\partial\mu}=-\frac{3}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}=\frac{3}{2}N\approx\frac{3}{2}N_0,$$

откуда

$$E=E_0+\frac{3}{2}N_0\mu=E_0-\frac{3\pi^2\hbar^6}{g^2m^3}N_0\left(\frac{N_0-N}{TV}\right)^2,$$

где $E_0=E_0(T)$ — энергия при $\mu=0$, т. е. функция (62,5). Вторая производная от второго члена по температуре даст, очевидно, искомый скачок производной теплоемкости. Произведя вычисления, найдем

$$\Delta\left(\frac{\partial C_v}{\partial T}\right)_V=-\frac{6\pi^2\hbar^6}{g^2m^3V^2}\left[N_0\left(\frac{1}{T}\frac{\partial N_0}{\partial T}\right)^2\right]_{T=T_0}=-3{,}66\frac{N}{T_0}. \qquad (2)$$

Значение производной $(\partial C_v/\partial T)_V$ при $T=T_0-0$ есть, согласно (62,5), $+2{,}89N/T_0$, а при $T=T_0+0$ оно равно, следовательно, $-0{,}77N/T_0$.

[1]) Подчеркнем, однако, что такое поведение теплоемкости — результат именно полного пренебрежения взаимодействием частиц газа; ситуация меняется при введении уже хотя бы слабого взаимодействия.