§ 63. Черное излучение

Важнейшим объектом применения статистики Бозе является электромагнитное излучение, находящееся в тепловом равновесии,— так называемое *черное излучение*.

Черное излучение можно рассматривать как газ, состоящий из фотонов. Линейность уравнений электродинамики отражает тот факт, что фотоны не взаимодействуют друг с другом (принцип суперпозиции для электромагнитного поля), так что фотонный газ можно считать идеальным. В силу целочисленности момента импульса фотонов этот газ подчиняется статистике Бозе.

Если излучение находится не в вакууме, а в материальной среде, то условие идеальности фотонного газа требует также и малости взаимодействия излучения с веществом. Это условие выполняется в газах (во всем спектре излучения, за исключением лишь частот, близких к линиям поглощения вещества); при большой же плотности вещества оно может соблюдаться лишь при очень высоких температурах.

Следует иметь в виду, что наличие хотя бы небольшого количества вещества вообще необходимо для самой возможности установления теплового равновесия в излучении, поскольку взаимодействие между самими фотонами можно считать полностью отсутствующим [1]).

Механизм, обеспечивающий установление равновесия, заключается при этом в поглощении и испускании фотонов веществом. Это обстоятельство приводит к существенной специфической особенности фотонного газа: число частиц N в нем является переменной величиной, а не заданной постоянной, как в обычном газе. Поэтому N должно само определиться из условий теплового равновесия. Потребовав минимальности свободной энергии газа (при заданных T и V), получим в качестве одного из необходимых условий $\partial F/\partial N = 0$. Но поскольку $(\partial F/\partial N)_{T,V} = \mu$, то мы находим, что химический потенциал газа фотонов равен нулю:

$$\mu = 0. \tag{63,1}$$

Распределение фотонов по различным квантовым состояниям с определенными значениями импульса $\hbar\mathbf{k}$ и энергиями $\varepsilon = \hbar\omega = \hbar ck$ (и определенными поляризациями) дается, следовательно, формулой (54,2) с $\mu = 0$:

$$\bar{n}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1}. \tag{63,2}$$

Это — так называемое *распределение Планка*.

[1]) Отвлекаясь от совершенно ничтожного взаимодействия (рассеяние света на свете), связанного с возможностью возникновения виртуальных электронно-позитронных пар.

Считая объем достаточно большим, перейдем обычным образом (см. II, § 52) от дискретного к непрерывному распределению собственных частот излучения. Число колебаний с компонентами волнового вектора **k** в интервалах $d^3k = dk_x\,dk_y\,dk_z$ равно $Vd^3k/(2\pi)^3$, а число колебаний с абсолютной величиной волнового вектора в интервале dk есть соответственно

$$\frac{V}{(2\pi)^3}4\pi k^2\,dk.$$

Вводя частоту $\omega = ck$ и умножая на 2 (два независимых направления поляризации колебаний), получим число квантовых состояний фотонов с частотами в интервале между ω и $\omega + d\omega$:

$$\frac{V\omega^2\,d\omega}{\pi^2c^3}. \qquad (63,3)$$

Умножив распределение (63,2) на эту величину, найдем число фотонов в данном интервале частот:

$$dN_\omega = \frac{V}{\pi^2c^3}\frac{\omega^2\,d\omega}{e^{\hbar\omega/T}-1}, \qquad (63,4)$$

а умножив еще на $\hbar\omega$, получим энергию излучения, заключенную в этом участке спектра:

$$dE_\omega = \frac{V\hbar}{\pi^2c^3}\frac{\omega^3\,d\omega}{e^{\hbar\omega/T}-1}. \qquad (63,5)$$

Эта формула для спектрального распределения энергии черного излучения называется *формулой Планка*[1]). Будучи выражена через длины волн $\lambda = 2\pi c/\omega$, она имеет вид

$$dE_\lambda = \frac{16\pi^2c\hbar V}{\lambda^5}\frac{d\lambda}{e^{2\pi\hbar c/T\lambda}-1}. \qquad (63,6)$$

При малых частотах ($\hbar\omega \ll T$) формула (63,5) дает *формулу Рэлея—Джинса*:

$$dE_\omega = V\frac{T}{\pi^2c^3}\omega^2\,d\omega. \qquad (63,7)$$

Обратим внимание на то, что она не содержит квантовой постоянной $\hbar$ и может быть получена умножением числа собственных колебаний (63,3) на T; в этом смысле она соответствует классической статистике, в которой на каждую колебательную степень свободы должна приходиться энергия T (закон равнораспределения, § 44).

---

[1]) Открытие этого закона *Планком (M. Planck)* в 1900 г. положило начало созданию квантовой теории.

В обратном предельном случае больших частот ($\hbar\omega \gg T$) формула (63,5) дает

$$dE_\omega = V\frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\omega^3 e^{-\hbar\omega/T}\,d\omega. \qquad (63,8)$$

(формула Вина).

На рис. 7 изображен график функции $x^3/(e^x-1)$, отвечающей распределению (63,5).

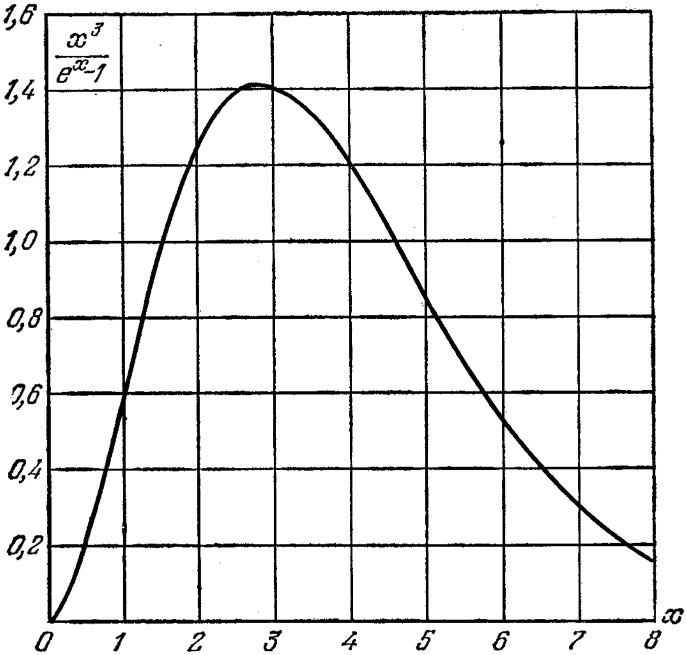

Рис. 7.

Плотность спектрального распределения энергии черного излучения по частотам $dE_\omega/d\omega$ имеет максимум при частоте $\omega=\omega_m$, определяющейся равенством

$$\frac{\hbar\omega_m}{T} = 2{,}822. \qquad (63,9)$$

Таким образом, при повышении температуры положение максимума распределения смещается в сторону больших частот пропорционально T *(закон смещения)*[1].

[1] Плотность распределения по длинам волн $dE_\lambda/d\lambda$ тоже имеет максимум, но при ином значении аналогичного отношения:

$$2\pi\hbar c/T\lambda_m = 4{,}965.$$

Таким образом, точка максимума (λ_m) распределения по длинам волн смещается обратно пропорционально температуре.

Вычислим термодинамические величины черного излучения. При $\mu=0$ свободная энергия F совпадает с Ω (так как $F=\Phi-PV=N\mu+\Omega$). Согласно формуле (56,4), в которой полагаем $\mu=0$ и переходим обычным образом (с помощью (63,3)) от суммирования к интегрированию, получаем

$$F=T\frac{V}{\pi^2c^3}\int_0^\infty \omega^2\ln\left(1-e^{-\hbar\omega/T}\right)d\omega. \tag{63,10}$$

Вводя переменную интегрирования $x=\hbar\omega/T$ и интегрируя по частям, получим

$$F=-V\frac{T^4}{3\pi^2\hbar^3c^3}\int_0^\infty\frac{x^3\,dx}{e^x-1}.$$

Стоящий здесь интеграл равен $\pi^4/15$ (см. примечание на стр. 191). Таким образом,

$$F=-V\frac{\pi^2T^4}{45\,(\hbar c)^3}=-\frac{4\sigma}{3c}VT^4. \tag{63,11}$$

Если T измеряется в градусах, то коэффициент σ *(постоянная Стефана — Больцмана)* равен

$$\sigma=\frac{\pi^2k^4}{60\hbar^3c^2}=5{,}67\cdot10^{-5}\,\frac{г}{сек^3\cdot град^4}. \tag{63,12}$$

Энтропия

$$S=-\frac{\partial F}{\partial T}=\frac{16\sigma}{3c}VT^3. \tag{63,13}$$

Она пропорциональна кубу температуры. Полная энергия излучения $E=F+TS$ равна

$$E=\frac{4\sigma}{c}VT^4=-3F. \tag{63,14}$$

Это выражение можно было бы, разумеется, получить и непосредственным интегрированием распределения (63,5). Таким образом, полная энергия черного излучения пропорциональна четвертой степени температуры *(закон Больцмана)*.

Для теплоемкости излучения имеем

$$C_v=\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V=\frac{16\sigma}{c}T^3V. \tag{63,15}$$

Наконец, давление

$$P=-\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T=\frac{4\sigma}{3c}T^4, \tag{63,16}$$

$$PV=\frac{E}{3}. \tag{63,17}$$

Как и следовало, для газа фотонов получается то же предельное выражение для давления, что и у ультрарелятивистского электронного газа (§ 61); соотношение (63,17) является непосредственным следствием линейной зависимости ($\varepsilon = cp$) между энергией и импульсом частицы.

Полное число фотонов в черном излучении есть

$$N = \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^2 \, d\omega}{e^{\hbar\omega/T} - 1} = \frac{VT^3}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^2 \, dx}{e^x - 1}.$$

Стоящий здесь интеграл выражается через $\zeta(3)$ (см. примечание на стр. 191). Таким образом,

$$N = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 V = 0{,}244 \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 V. \tag{63,18}$$

При адиабатическом расширении (или сжатии) газа фотонов объем и температура связаны друг с другом соотношением $VT^3 = \text{const}$. В силу (63,16) давление и объем связаны при этом соотношением $PV^{4/3} = \text{const}$. Сравнивая с (61,8), мы видим, что уравнение адиабаты газа фотонов совпадает (как и следовало ожидать) с адиабатой ультрарелятивистского газа.

Рассмотрим какое-либо тело, находящееся в тепловом равновесии с окружающим его черным излучением. Тело непрерывно отражает и поглощает падающие на него фотоны и в то же время само излучает новые, причем в равновесии все эти процессы взаимно компенсируются таким образом, чтобы распределение фотонов по частотам и направлениям оставалось в среднем неизменным.

Благодаря полной изотропии черного излучения из каждого элемента его объема исходит равномерно во все стороны поток энергии. Введем обозначение

$$e_0(\omega) = \frac{1}{4\pi V} \frac{dE_\omega}{d\omega} = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3 c^3 \left(e^{\hbar\omega/T} - 1\right)} \tag{63,19}$$

для спектральной плотности черного излучения, отнесенной к единице объема и единичному интервалу телесных углов. Тогда плотность потока энергии с частотами в интервале $d\omega$, исходящего из каждой точки в элемент телесного угла do, будет

$$c e_0(\omega) \, do \, d\omega.$$

Поэтому энергия излучения (с частотами в $d\omega$), падающего в единицу времени на единицу площади поверхности тела под углом θ к ее нормали, есть

$$c e_0(\omega) \cos\theta \, do \, d\omega, \quad do = 2\pi \sin\theta \, d\theta.$$

Обозначим посредством $A(\omega, \theta)$ *поглощательную способность* тела как функцию частоты излучения и направления его падения; эта величина определяется как доля падающей на поверхность тела энергии излучения данного интервала частоты, поглощаемая этим телом, причем в эту долю не включается излучение, прошедшее насквозь через тело, если таковое имеется. Тогда количество поглощенного (в 1 *сек* на 1 *см*^{2} поверхности) излучения будет

$$ce_0(\omega) A(\omega, \theta) \cos\theta \, do \, d\omega. \tag{63,20}$$

Предположим, что тело не рассеивает излучения и не флуоресцирует, т. е. отражение происходит без изменения угла θ и частоты. Кроме того, будем считать, что излучение не проходит сквозь тело; иначе говоря, все неотраженное излучение полностью поглощается. Тогда количество излучения (63,20) должно компенсироваться излучением, испускаемым самим телом в тех же направлениях и с теми же частотами. Обозначив интенсивность испускания (с 1 *см*^{2} поверхности) посредством $J(\omega, \theta) \, d\omega \, do$ и приравнивая ее поглощаемой энергии, получим следующее соотношение:

$$J(\omega, \theta) = ce_0(\omega) A(\omega, \theta) \cos\theta. \tag{63,21}$$

Функции $J(\omega, \theta)$ и $A(\omega, \theta)$, разумеется, различны для разных тел. Мы видим, однако, что их отношение оказывается не зависящей от свойств тела универсальной функцией частоты и направления:

$$\frac{J(\omega, \theta)}{A(\omega, \theta)} = ce_0(\omega) \cos\theta,$$

определяющейся распределением энергии в спектре черного излучения (при температуре, равной температуре тела); это утверждение составляет содержание так называемого *закона Кирхгофа*.

Если тело рассеивает свет, то закон Кирхгофа может быть сформулирован лишь более ограниченным образом. Поскольку отражение в этом случае происходит с изменением угла θ, то, исходя из условия равновесия, можно требовать лишь равенства поглощаемого со всех сторон излучения (данной частоты) полному испусканию телом во все стороны:

$$\int J(\omega, \theta) \, do = ce_0(\omega) \int A(\omega, \theta) \cos\theta \, do. \tag{63,22}$$

Угол θ меняется, вообще говоря, и в том случае, когда излучение может проходить насквозь через тело (благодаря преломлению при входе в тело и при выходе из него). В этом случае соотношение (63,22) должно еще быть проинтегрировано по всей поверхности тела; функции $A(\omega, \theta)$ и $J(\omega, \theta)$ зависят при этом не только от вещества тела, но и от его формы и точки поверхности.

Наконец, при наличии рассеяния, сопровождающегося изменением частоты (*флуоресценция*), закон Кирхгофа имеет место лишь для полных интегралов как по направлениям, так и по частотам излучения:

$$\iint J(\omega, \theta)\, do\, d\omega = c \iint e_0(\omega) A(\omega, \theta) \cos\theta\, do\, d\omega. \qquad (63{,}23)$$

Тело, полностью поглощающее все падающее на него излучение, называется *абсолютно черным*[1]). Для такого тела по определению $A(\omega, \theta) = 1$, и его испускательная способность полностью определяется функцией

$$J_0(\omega, \theta) = c e_0(\omega) \cos\theta, \qquad (63{,}24)$$

одинаковой для всех абсолютно черных тел. Отметим, что интенсивность испускания абсолютно черного тела весьма просто зависит от направления — она пропорциональна косинусу угла с нормалью к поверхности тела. Полная интенсивность испускания абсолютно черного тела J_0 получается интегрированием (63,24) по всем частотам и всем телесным углам в полусфере:

$$J_0 = c \int_0^\infty e_0(\omega)\, d\omega \cdot \int_0^{\pi/2} 2\pi \cos\theta \sin\theta\, d\theta = \frac{cE}{4V},$$

где E определяется формулой (63,14). Таким образом,

$$J_0 = \sigma T^4, \qquad (63{,}25)$$

т. е. полная интенсивность испускания абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени его температуры.

Наконец, рассмотрим излучение, не находящееся в тепловом равновесии, причем неравновесным может быть как спектральное распределение излучения, так и его распределение по направлениям. Пусть $e(\omega, \mathbf{n})\, d\omega\, do$ есть пространственная плотность этого излучения в спектральном интервале $d\omega$ и с направлениями $\mathbf{n}$ волнового вектора в элементе телесного угла do. Можно ввести понятие о температуре излучения в каждом отдельном небольшом интервале частот и направлений как о температуре, при которой плотность $e(\omega, \mathbf{n})$ равна значению, даваемому формулой Планка, т. е.

$$e(\omega, \mathbf{n}) = e_0(\omega).$$

Обозначив эту температуру как $T_{\omega\mathbf{n}}$, будем иметь

$$T_{\omega\mathbf{n}} = \frac{\hbar\omega}{\ln\left\{1 + \dfrac{\hbar\omega^3}{4\pi^3 c^3} \dfrac{1}{e(\omega, \mathbf{n})}\right\}}. \qquad (63{,}26)$$

[1]) Такое тело может быть осуществлено в виде полости с хорошо поглощающими внутренними стенками, снабженной маленьким отверстием. Всякий луч, падающий извне в это отверстие, мог бы снова попасть в него и выйти наружу, лишь претерпев многократное отражение от стенок полости. Поэтому при достаточно малых размерах отверстия полость будет поглощать практически все падающее на отверстие излучение, и таким образом отверстие будет представлять собой абсолютно черное тело.

Представим себе абсолютно черное тело, излучающее в окружающее (пустое) пространство. Излучение свободно распространяется вдоль прямолинейных лучей и вне тела уже не будет находиться в тепловом равновесии,— оно отнюдь не будет изотропным по всем направлениям, каковым должно быть равновесное излучение. Поскольку фотоны распространяются в пустоте, не взаимодействуя друг с другом, мы имеем основания для строгого применения теоремы Лиувилля к функции распределения фотонов в их фазовом пространстве, т. е. по координатам и компонентам волнового вектора[1]). Согласно этой теореме функция распределения остается постоянной вдоль фазовых траекторий. Но функция распределения совпадает, с точностью до зависящего от частоты множителя, с пространственной плотностью излучения $e(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{r})$ данной частоты и направления. Поскольку частота излучения тоже не меняется при его распространении, мы можем сформулировать следующий важный результат: во всяком элементе телесного угла, в котором (из данной точки пространства) распространяется излучение, плотность излучения $e(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{r})$ будет равна плотности, которую оно имело внутри испускающего его черного тела, т. е. плотности $e_0(\omega)$ черного излучения. В то время, однако, как в равновесном излучении такая плотность существует для всех направлений, здесь она будет иметь место лишь для некоторого избранного интервала направлений.

Определяя температуру неравновесного излучения согласно (63,26), мы можем выразить этот результат иначе, сказав, что температура $T_{\omega\mathbf{n}}$ будет равна температуре T излучающего черного тела для всех направлений, в которых (в каждой данной точке пространства) вообще имеется распространяющееся излучение. Если же определять температуру излучения по усредненной по всем направлениям плотности, то она окажется, разумеется, ниже температуры черного тела.

Все эти следствия теоремы Лиувилля полностью сохраняют свою силу и в случае наличия отражающих зеркал и преломляющих линз — при соблюдении, конечно, условий применимости геометрической оптики. С помощью линз или зеркал можно сфокусировать излучение, т. е. увеличить диапазон направлений, по которым идут лучи (в данную точку пространства). Тем самым можно повысить среднюю температуру излучения в этой точке; однако, как это вытекает из сказанного выше, никоим образом нельзя сделать ее выше температуры черного тела, из которого это излучение было испущено.

---

[1]) Рассматривая предельный случай геометрической оптики, мы можем говорить о координатах фотона.