§ 79. Метод корреляционных функций

Преимущество изложенного в предыдущем параграфе метода Дебая — Хюккеля состоит в его простоте и физической прозрачности. С другой стороны, его основной недостаток заключается в невозможности обобщения для вычисления следующих приближений по концентрации. Мы изложим поэтому вкратце также и другой метод (предложенный *Н. Н. Боголюбовым*, 1946), хотя и более сложный, но позволяющий в принципе вычислить также и следующие члены разложения термодинамических величин.

Этот метод основан на рассмотрении так называемых *корреляционных функций* между одновременными положениями нескольких частиц в заданных точках пространства. Простейшей и наиболее важной из них является бинарная корреляционная функция w_{ab}, пропорциональная вероятности найти одновременно две частицы (иона) в заданных точках $\mathbf{r}_a$ и $\mathbf{r}_b$ (оба иона a и b могут быть как одного, так и разных родов). Ввиду изотропии и однородности газа эта функция зависит, конечно, лишь от $r = |\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a|$. Мы выберем нормировочный коэффициент в функции w_{ab} таким образом, чтобы она стремилась к единице при $r \to \infty$.

Если функция w_{ab} известна, искомая энергия $E_{\text{корр}}$ может быть найдена путем интегрирования по очевидной формуле[1])

$$E_{\text{корр}} = \frac{1}{2V^2} \sum_{a,\,b} N_a N_b \iint u_{ab} w_{ab} dV_a dV_b, \tag{79,1}$$

где суммирование ведется по всем родам ионов, а u_{ab} — энергия кулоновского взаимодействия пары ионов на расстоянии r.

Согласно формуле распределения Гиббса функция w_{ab} дается следующим выражением:

$$w_{ab} = \frac{1}{V^{N-2}} \int \exp\left\{\frac{F - F_{\text{ид}} - U}{T}\right\} dV_1 dV_2 \, \ldots \, dV_{N-2}, \tag{79,2}$$

где U — энергия кулоновского взаимодействия всех ионов, а интегрирование производится по координатам всех ионов, за исключением двух данных ионов. Для приближенного вычисления этого интеграла воспользуемся следующим приемом.

Дифференцируем равенство (79,2) по координатам иона b:

$$\frac{\partial w_{ab}}{\partial \mathbf{r}_b} = -\frac{w_{ab}}{T}\frac{\partial u_{ab}}{\partial \mathbf{r}_b} - \frac{1}{VT}\sum_c N_c \int \frac{\partial u_{bc}}{\partial \mathbf{r}_b} w_{abc} dV_c, \tag{79,3}$$

---

[1]) Сама по себе эта формула не связана, конечно, с кулоновским характером взаимодействия частиц и предполагает лишь его парность.

где суммирование в последнем члене производится по всем родам ионов, а w_{abc} — тройная функция корреляции, определенная согласно

$$w_{abc}=\frac{1}{V^{N-3}}\int \exp\left\{\frac{F-F_{\text{ид}}-U}{T}\right\}dV_1dV_2\ \dots\ dV_{N-3}$$

по аналогии с (79,2).

Предполагая газ достаточно разреженным и рассматривая лишь члены первого порядка, можно выразить функцию тройной корреляции через бинарные корреляции. Действительно, пренебрегая возможностью всем трем ионам находиться вблизи друг друга, имеем

$$w_{abc}=w_{ab}w_{bc}w_{ac}.$$

В том же приближении мы можем считать, что даже пары частиц не находятся настолько близко друг к другу, чтобы w_{ab} существенно отличались от единицы. Вводя малые величины

$$\omega_{ab}=w_{ab}-1 \tag{79,4}$$

и пренебрегая их высшими степенями, можем написать:

$$w_{abc}=\omega_{ab}+\omega_{bc}+\omega_{ac}+1. \tag{79,5}$$

При подстановке этого выражения в интеграл в правой стороне (79,3) остается только член с ω_{ac}; остальные обращаются тождественно в нуль в силу изотропии газа. В первом члене справа в (79,3) достаточно положить $w_{ab}=1$. Таким образом,

$$\frac{\partial\omega_{ab}}{\partial\mathbf{r}_b}=-\frac{1}{T}\frac{\partial u_{ab}}{\partial\mathbf{r}_b}-\frac{1}{TV}\sum_c N_c\int\omega_{ac}\frac{\partial u_{bc}}{\partial\mathbf{r}_b}dV_c.$$

Возьмем теперь дивергенцию от обеих сторон этого равенства, помня, что

$$u_{ab}=\frac{z_az_be^2}{r},\qquad \mathbf{r}=\mathbf{r}_b-\mathbf{r}_a,$$

и учитывая известную формулу

$$\Delta\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

После этого интегрирование становится тривиальным ввиду наличия δ-функции, и мы получаем

$$\Delta\omega_{ab}(\mathbf{r})=\frac{4\pi z_az_be^2}{T}\delta(\mathbf{r})+\frac{4\pi e^2z_b}{TV}\sum_c N_cz_c\omega_{ac}(\mathbf{r}). \tag{79,6}$$

Решение этой системы уравнений можно искать в виде

$$\omega_{ab}(\mathbf{r})=z_az_b\omega(\mathbf{r}), \tag{79,7}$$

в результате чего система сводится к одному уравнению

$$\Delta\omega(\mathbf{r}) - \varkappa^2\omega(\mathbf{r}) = \frac{4\pi e^2}{T}\delta(\mathbf{r}). \tag{79,8}$$

Это окончательное уравнение имеет ту же форму, что и уравнение (78,7) в методе Дебая — Хюккеля (член с δ-функцией в (79,8) соответствует граничному условию при $r \to 0$, накладываемому на функцию $\varphi(r)$ в (78,7)). Решение уравнения (79,8):

$$\omega(r) = -\frac{e^2}{T}\frac{e^{-\varkappa r}}{r}, \tag{79,9}$$

чем и определяются бинарные корреляционные функции в плазме.

Для вычисления энергии достаточно подставить теперь w_{ab} из (79,4), (79,7), (79,9) в (79,1). Переходя к интегрированию по относительным координатам двух частиц, находим

$$E_{\text{корр}} = -\frac{V}{2}\sum_{a,\,b} n_a n_b \int_0^\infty \frac{z_a z_b e^2}{r}\frac{z_a z_b e^2}{Tr} e^{-\varkappa r} 4\pi r^2\, dr$$

(член 1 в w_{ab} не дает вклада в энергию в силу условия электрической нейтральности плазмы). Произведя интегрирование, вернемся к прежнему результату (78,11).

В следующем приближении вычисления становятся более громоздкими. В частности, предположение (79,5) теперь недостаточно, и следует ввести тройные корреляции, не сводящиеся уже к бинарным. Для них получается уравнение, аналогичное (79,3), содержащее теперь четверные корреляции, которые, однако, в данном (втором) приближении сводятся к тройным[1]).

§ 80. Термодинамические величины вырожденной плазмы

В изложенной в § 78 теории предполагалось, что плазма далека от вырождения, т. е. подчиняется статистике Больцмана. Рассмотрим теперь ситуацию, когда температура плазмы настолько низка, что ее электронная компонента уже вырождена:

$$T \ll \frac{\hbar^2}{m} n^{2/3}, \tag{80,1}$$

где m — масса электрона (ср. (57,8)); при этом ионная компонента благодаря большой массе ионов может быть еще далека от вырож-

---

[1]) Члены следующего порядка в термодинамических величинах плазмы фактически вычислены (другим методом) *А. А. Веденовым* и *А. И. Ларкиным*, ЖЭТФ **36**, 1133 (1959).