

в результате чего система сводится к одному уравнению

$$\Delta\omega(\mathbf{r}) - \kappa^2\omega(\mathbf{r}) = \frac{4\pi e^2}{T} \delta(\mathbf{r}). \quad (79,8)$$

Это окончательное уравнение имеет ту же форму, что и уравнение (78,7) в методе Дебая — Хюккеля (член с  $\delta$ -функцией в (79,8) соответствует граничному условию при  $r \rightarrow 0$ , накладываемому на функцию  $\varphi(r)$  в (78,7)). Решение уравнения (79,8):

$$\omega(r) = -\frac{e^2}{T} \frac{e^{-\kappa r}}{r}, \quad (79,9)$$

чем и определяются бинарные корреляционные функции в плазме.

Для вычисления энергии достаточно подставить теперь  $\omega_{ab}$  из (79,4), (79,7), (79,9) в (79,1). Переходя к интегрированию по относительным координатам двух частиц, находим

$$E_{\text{корр}} = -\frac{V}{2} \sum_{a,b} n_a n_b \int_0^{\infty} \frac{z_a z_b e^2}{r} \frac{z_a z_b e^2}{Tr} e^{-\kappa r} 4\pi r^2 dr$$

(член 1 в  $\omega_{ab}$  не дает вклада в энергию в силу условия электрической нейтральности плазмы). Произведя интегрирование, вернемся к прежнему результату (78,11).

В следующем приближении вычисления становятся более громоздкими. В частности, предположение (79,5) теперь недостаточно, и следует ввести тройные корреляции, не сводящиеся уже к бинарным. Для них получается уравнение, аналогичное (79,3), содержащее теперь четверные корреляции, которые, однако, в данном (втором) приближении сводятся к тройным<sup>1)</sup>.

## § 80. Термодинамические величины вырожденной плазмы

В изложенной в § 78 теории предполагалось, что плазма далека от вырождения, т. е. подчиняется статистике Больцмана. Рассмотрим теперь ситуацию, когда температура плазмы настолько низка, что ее электронная компонента уже вырождена:

$$T \ll \frac{\hbar^2}{m} n^{2/3}, \quad (80,1)$$

где  $m$  — масса электрона (ср. (57,8)); при этом ионная компонента благодаря большой массе ионов может быть еще далека от вырождения.

<sup>1)</sup> Члены следующего порядка в термодинамических величинах плазмы фактически вычислены (другим методом) А. А. Веденовым и А. И. Ларкиным, ЖЭТФ 36, 1133 (1959).

дения. Напомним, что условие слабой неидеальности вырожденной плазмы состоит в требовании

$$\frac{mz^{2/3}e^2}{\hbar^2 n^{1/3}} \ll 1 \quad (80,2)$$

(см. (57,9)); оно выполняется тем лучше, чем выше плотность плазмы.

Для вырожденного газа удобными переменными являются (помимо температуры  $T$  и объема  $V$ ) его химические потенциалы  $\mu_a$  вместо чисел частиц  $N_a$ <sup>1)</sup>. Соответственно этому будем вычислять  $\Omega$  — термодинамический потенциал по отношению к этим переменным. Отметим, что химические потенциалы не являются при этом все независимыми переменными; они связаны друг с другом одним соотношением, следующим из условия электрической нейтральности плазмы:

$$\sum_a z_a N_a = \sum_a z_a \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_a} = 0. \quad (80,3)$$

Вспользуемся формулой

$$\left( \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} \right)_{T, V, \mu_a} = \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda} \right\rangle,$$

выражающей производную от  $\Omega$  по некоторому параметру  $\lambda$  через среднее значение такой же производной от гамильтониана системы (ср. аналогичные формулы (11,4), (15,11)). В данном случае выберем в качестве параметра  $\lambda$  квадрат заряда  $e^2$ . Гамильтониан плазмы содержит  $e^2$  в виде общего коэффициента в операторе кулоновского взаимодействия частиц  $\hat{U}$ . Поэтому

$$\left( \frac{\partial \Omega}{\partial e^2} \right)_{T, V, \mu_a} = \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial e^2} \right\rangle = \frac{1}{e^2} \langle \hat{U} \rangle, \quad (80,4)$$

так что вычисление  $\Omega$  сводится к вычислению среднего значения  $\langle \hat{U} \rangle$ .

Мы увидим, что в вырожденной слабо неидеальной плазме основную роль в поправках к термодинамическим величинам идеального газа играет обменная часть электрического взаимодействия электронов (которая в классическом случае несущественна и в § 78 вовсе не учитывалась). Имея это в виду, будем писать в операторе  $\hat{U}$  лишь члены, описывающие кулоновское взаимодействие электронов.

<sup>1)</sup> Определение понятия химических потенциалов компонент смеси — см. § 85.

Вычисление  $\langle \hat{U} \rangle$  наиболее просто осуществляется с помощью метода вторичного квантования. Следуя этому методу (см. III, §§ 64, 65), вводим систему нормированных волновых функций  $\Psi_{\rho\sigma}$ , описывающих состояния свободных электронов, движущихся в объеме  $V$  с импульсами  $\mathbf{p}$  и проекциями спина  $\sigma$  ( $\sigma = \pm 1/2$ ). Импульс  $\mathbf{p}$  пробегает бесконечный набор дискретных значений, интервалы между которыми стремятся к нулю при  $V \rightarrow \infty$ . Далее вводим операторы  $\hat{a}_{\rho\sigma}$  и  $\hat{a}_{\rho\sigma}^+$  уничтожения и рождения электронов в состояниях  $\Psi_{\rho\sigma}$ , а с их помощью образуем  $\psi$ -операторы

$$\hat{\psi} = \sum_{\rho\sigma} \Psi_{\rho\sigma} \hat{a}_{\rho\sigma}, \quad \hat{\psi}^+ = \sum_{\rho\sigma} \Psi_{\rho\sigma}^* \hat{a}_{\rho\sigma}^+. \quad (80,5)$$

Кулоновское взаимодействие частиц имеет «парный» характер; оператор такого взаимодействия записывается в методе вторичного квантования в виде интеграла

$$\hat{U} = \frac{1}{2} \iint \hat{\psi}^+(\mathbf{r}_1) \hat{\psi}^+(\mathbf{r}_2) \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \hat{\psi}(\mathbf{r}_2) \hat{\psi}(\mathbf{r}_1) dV_1 dV_2. \quad (80,6)$$

Требуемое усреднение этого оператора производится в два этапа: сначала усреднение по заданному квантовому состоянию системы, а затем усреднение по равновесному статистическому распределению по различным квантовым состояниям. В слабо неидеальной плазме  $\hat{U}$  играет роль малого возмущения. Вычислим среднее значение этой величины в первом приближении теории возмущений, другими словами — по отношению к состояниям системы невзаимодействующих частиц, т. е. идеального газа.

Квантовомеханическое усреднение сводится к взятию соответствующего диагонального матричного элемента. После подстановки  $\psi$ -операторов (80,5), оператор (80,6) представится в виде суммы членов, содержащих различные произведения операторов рождения и уничтожения, взятых по четыре:

$$\hat{U} = \frac{1}{2} \sum \langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | U_{12} | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle \hat{a}_{\mathbf{p}'_1 \sigma'_1}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}'_2 \sigma'_2}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_1 \sigma_1} \hat{a}_{\mathbf{p}_2 \sigma_2}, \quad (80,7)$$

где суммирование производится по всем импульсам и проекциям спина, а  $\langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | U_{12} | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle$  — матричные элементы от энергии взаимодействия двух электронов  $U_{12} = e^2 / |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ ; поскольку кулоновское взаимодействие не зависит от спинов, то эти элементы берутся для переходов без изменения проекций спинов электронов, т. е. могут вычисляться по чисто орбитальным функциям

$$\Psi_{\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar}.$$

Из всех членов суммы (80,7) диагональные матричные элементы имеют лишь те, которые содержат две пары операторов  $\hat{a}_{\rho\sigma}$ ,  $\hat{a}_{\rho\sigma}^+$  с одинаковыми индексами, причем произведение  $\hat{a}_{\rho\sigma}^+ \hat{a}_{\rho\sigma}$

заменяется просто числом заполнения данного квантового состояния электронов<sup>1)</sup>. Положив  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1$ ,  $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_2$ , получим члены

$$\frac{e^2}{2V^2} \sum_{\mathbf{p}_1 \neq \mathbf{p}_2} \sum_{\sigma_1 \sigma_2} n_{\mathbf{p}_1 \sigma_1} n_{\mathbf{p}_2 \sigma_2} \int \frac{dV_1 dV_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \quad (80,8)$$

а положив  $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_1$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2$ , — члены

$$-\frac{e^2}{2V^2} \sum_{\mathbf{p}_1 \neq \mathbf{p}_2} \sum_{\sigma} n_{\mathbf{p}_1 \sigma} n_{\mathbf{p}_2 \sigma} \int e^{i(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) / \hbar} \frac{dV_1 dV_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (80,9)$$

(знак минус возникает здесь в результате перестановки операторов  $\hat{a}_{\mathbf{p}_1 \sigma}^+$  и  $\hat{a}_{\mathbf{p}_2 \sigma}$ , нужной для приведения произведения  $\hat{a}_{\mathbf{p}_2 \sigma}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_1 \sigma}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_2 \sigma} \hat{a}_{\mathbf{p}_1 \sigma}$  к виду  $\hat{a}_{\mathbf{p}_2 \sigma}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_2 \sigma} \hat{a}_{\mathbf{p}_1 \sigma}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_1 \sigma}$ ; напомним, что в случае фермионов эти операторы антикоммумутативны).

Члены (80,8) представляют собой просто энергию прямого кулоновского взаимодействия электронов, равномерно распределенных в пространстве. Как уже было отмечено в § 78, ввиду электрической нейтральности плазмы эти члены в действительности тождественно сокращаются с аналогичными членами, выражающими энергию взаимодействия других частиц (ионов) друг с другом и с электронами (и в этой связи расходимость интеграла в (80,8) несущественна). Члены же (80,9), содержащие недиагональные матричные элементы кулоновского потенциала, выражают собой искомый обменный эффект<sup>2)</sup>.

Имея в виду, что при макроскопическом объеме  $V$  импульсы электронов пробегают практически непрерывный ряд значений, можно перейти от суммирования по  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$  к интегрированию по  $V^2 d^3 p_1 d^3 p_2 / (2\pi\hbar)^6$  (при этом ограничение  $\mathbf{p}_1 \neq \mathbf{p}_2$  становится несущественным). Интеграл в (80,9) равен<sup>3)</sup>

$$V \int e^{i(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{r} / \hbar} \frac{dV}{r} = V \frac{4\pi\hbar^2}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2}.$$

1) Что касается членов с произведениями четырех операторов с одинаковыми индексами, то их число неизмеримо мало по сравнению с числом членов с двумя различными парами одинаковых индексов, и их поэтому не надо учитывать (вклад в  $\Omega$  от этих членов содержал бы лишнюю степень  $1/V$ ).

2) Для лучшего уяснения структуры членов (80,8) и (80,9), обратим внимание на то, что в первых из них пары операторов  $\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}$ ,  $\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}^+$  с одинаковыми индексами происходят от  $\psi$ -операторов, взятых в одной и той же точке пространства ( $\mathbf{r}_1$  или  $\mathbf{r}_2$ ); в членах же (80,9) эти пары происходят от  $\psi$ -операторов, взятых в различных точках.

3) Здесь использовано известное выражение для фурье-компоненты кулоновского потенциала:

$$\int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{dV}{r} = \frac{4\pi}{k^2}$$

(см., ниже примечание на стр. 390).

В результате выражение (80,9) принимает вид

$$-2\pi e^2 V \sum_{\sigma} \iint \frac{n_{p_1\sigma} n_{p_2\sigma}}{(p_1 - p_2)^2} \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^6 \hbar^4}.$$

Статистическое усреднение этого выражения производится (в рассматриваемом приближении) по равновесному распределению идеального газа. Ввиду статистической независимости частиц идеального газа в различных квантовых состояниях при этом  $\langle n_{p_1\sigma} n_{p_2\sigma} \rangle = \bar{n}_{p_1\sigma} \bar{n}_{p_2\sigma}$ ; средние же значения  $\bar{n}_{p\sigma}$  даются формулой распределения Ферми  $\bar{n}_{p\sigma} = [e^{(\epsilon - \mu_e)/T} + 1]^{-1}$  ( $\mu_e$  — химический потенциал электронов). Наконец, поскольку получившееся выражение просто пропорционально  $e^2$ , то, согласно (80,4), оно непосредственно дает искомую поправку к термодинамическому потенциалу плазмы:

$$\Omega_{\text{обм}} = -\frac{4\pi e^2}{\hbar^4} V \iint \frac{\bar{n}_{p_1} \bar{n}_{p_2}}{(p_1 - p_2)^2} \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^6} \quad (80,10)$$

(E. Wigner, F. Seitz, 1934).

В предельном случае сильного вырождения электронного газа ( $T \ll \hbar^2 n^{2/3}/m$ ) распределение  $\bar{n}_p$  сводится к «ступенчатой» функции ( $\bar{n}_p = 1$  при  $p \leq p_F$ ,  $\bar{n}_p = 0$  при  $p \geq p_F$ ). Вычисление интеграла приводит тогда к результату<sup>1)</sup>:

$$\Omega_{\text{обм}} = -V \frac{e^2 p_F^{\frac{1}{2}}}{4\pi^3 \hbar^4} = -V \frac{e^2 m^2 \mu_e^2}{\pi^3 \hbar^4}. \quad (80,11)$$

Эта же величина, если выразить в ней химический потенциал через плотность числа электронов  $n_e = N_e/V$  (согласно (57,3)) дает поправку к свободной энергии:

$$F_{\text{обм}} = -N_e \frac{3^{4/3}}{4\pi^{1/3}} e^2 n_e^{1/3}. \quad (80,12)$$

<sup>1)</sup> Интеграл

$$I = \iint \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{(p_1 - p_2)^2}, \quad p_1, p_2 \leq p_F,$$

заменой  $p_1 - p_2 = q$ ,  $(p_1 + p_2)/2 = s$  приводится к интегралу  $I = \iint q^{-2} d^3 q d^3 s$ , берущемуся по области  $|s \pm q/2| \leq p_F$ . Интеграл  $\int d^3 s$  (при заданном  $q$ ) есть объем, заключенный между двумя сферами радиуса  $p_F$  с центрами, раздвинутыми на расстояние  $q$ :

$$\int d^3 s = \frac{4\pi}{3} h^2 (3p_F - h), \quad h = p_F - \frac{q}{2}.$$

Интегрируя затем по  $d^3 q$  по области  $0 < q < 2p_F$ , получим  $I = 4\pi^2 p_F^{\frac{1}{2}}$ .

В обратном же предельном случае больцмановского газа ( $\mu_e < 0, |\mu_e| \gg T$ ) вычисление по формуле (80,10) дает<sup>1)</sup>

$$\Omega_{\text{обм}} = -V \frac{e^2 m^2 T^2}{4\pi^2 \hbar^4} e^{2\mu_e/T} \quad (80,13)$$

или, выразив  $\mu_e$  через  $n_e$  согласно (46,1а),

$$F_{\text{обм}} = -V \frac{\pi e^2 \hbar^2 n_e^2}{2mT}. \quad (80,14)$$

При  $T \sim \mu_e$  обменная поправка  $F_{\text{обм}} \sim Ve^2 n^{4/3}$ , между тем как найденная в § 78 корреляционная поправка  $F_{\text{корр}} \sim Ve^3 n^{3/2} / T^{1/2}$ ; при этом в силу условия слабой неидеальности

$$\frac{F_{\text{корр}}}{F_{\text{обм}}} \sim \left( \frac{e^2 n^{1/3}}{T} \right)^{1/2} \ll 1,$$

т. е. электронная обменная поправка действительно является главной. При повышении температуры, однако,  $F_{\text{обм}}$  убывает быстрее, чем  $F_{\text{корр}}$  (при  $T \gg \mu_e: F_{\text{обм}} \sim T^{-1}$ , а  $F_{\text{корр}} \sim T^{-1/2}$ ). Поэтому существует область, в которой обе поправки одинакового порядка величины. В этой области, однако, вырождение плазмы уже незначительно, и потому для корреляционной поправки можно пользоваться классическими формулами (78,11—14)<sup>2)</sup>.

В предыдущем изложении подразумевалось, что ионная компонента плазмы не только не вырождена, но и почти идеальна, т. е. что энергия взаимодействия ионов мала по сравнению с их тепловой энергией:  $n^{1/3} e^2 \ll T^3$ . Но если плотность плазмы не слишком велика:

$$\frac{me^2}{\hbar^2} \ll n^{1/3} \ll \frac{e^2 M}{\hbar^2} \quad (80,15)$$

( $M$ —масса иона), то температура  $T \sim n^{1/3} e^2$  превышает температуру вырождения ионов:

$$T \sim e^2 n^{1/3} \gg \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{M} \quad (80,16)$$

(причем  $T \ll e^4 M / \hbar^2$ ). В этих условиях ионная компонента составляет невырожденную, но существенно неидеальную систему.

<sup>1)</sup> В этом случае

$$\bar{n}_{p_1} \bar{n}_{p_2} = \exp \left\{ \frac{2\mu_e}{T} - \frac{p_1^2 + p_2^2}{2mT} \right\} = \exp \left\{ \frac{2\mu_e}{T} - \frac{4s^2 + q^2}{4mT} \right\}$$

и интегрирование по  $d^3 s d^3 q$  распространяется по всему  $q$ - и  $s$ -пространству.

<sup>2)</sup> Вопрос о вычислении корреляционной поправки при произвольной степени вырождения электронов представляет, тем не менее, определенный методический интерес. Эта задача будет рассмотрена в другом томе этого курса (том IX).

<sup>3)</sup> В этой и последующих оценках полагаем для простоты  $z=1$  (водородная плазма).

Минимальности энергии взаимодействия ионов друг с другом и с электронами отвечает тогда упорядоченное расположение ядер, т. е. ядра образуют кристаллическую решетку (А. А. Абрикосов, 1960). Это приводит к тому, что энергии прямого кулоновского взаимодействия различных частиц уже не полностью взаимно компенсируются. В каждой ячейке решетки поле ионов компенсируется находящимися в ней электронами. Но энергия взаимодействия частиц в пределах одной ячейки (размеры которой  $\sim n^{-1/3}$ ) отлична от нуля. По грубой оценке эта энергия  $\sim e^2 n^{1/3}$ , а для всей решетки (с числом ячеек  $N \sim Vn$ ) ее энергия связи составляет

$$|E_{\text{реш}}| \sim Ne^2 n^{1/3} \sim Ve^2 n^{4/3}. \quad (80,17)$$

По порядку величины она совпадает с обменной энергией вырожденной электронной компоненты плазмы. Для устойчивой решетки энергия связи, разумеется, отрицательна<sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Количественное вычисление энергии связи решетки — см. А. А. Абрикосов ЖЭТФ, 39, 1797 (1960).