ператур, в которой можно считать, что наряду с нейтральными атомами в газе имеются лишь однократно заряженные ионы. Вводя *степень ионизации* газа α как отношение числа ионизованных атомов к полному числу атомов, будем иметь

$$c=c_1=\frac{\alpha}{1+\alpha},\qquad c_0=\frac{1-\alpha}{1+\alpha},$$

и уравнение (104,2) даст: $(1-\alpha^2)/\alpha^2=PK_p^{(1)}$, откуда

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+PK_p^{(1)}}},\tag{104,5}$$

чем полностью определяется зависимость степени ионизации от давления и температуры (в рассматриваемой области температур).

§ 105. Равновесие по отношению к образованию пар

При чрезвычайно высоких температурах, сравнимых с энергией покоя электрона mc^2 [1]), столкновения частиц в веществе могут сопровождаться образованием электронных пар (электронов и позитронов); в результате само число частиц становится величиной не заданной, а определяющейся условиями теплового равновесия.

Образование пар (и их аннигиляция) может рассматриваться с термодинамической точки зрения как «химическая реакция» $e^+ + e^- = \gamma$, где символы e^+ и e^- обозначают позитрон и электрон, а символ γ—один или несколько фотонов. Химический потенциал газа фотонов равен нулю (§ 63). Поэтому условие равновесия по отношению к образованию пар будет иметь вид

$$\mu^- + \mu^+ = 0,\tag{105,1}$$

где μ^- и μ^+—химические потенциалы электронного и позитронного газов. Подчеркнем, что под μ подразумевается здесь релятивистское выражение для химического потенциала, включающее энергию покоя частиц (ср. § 27), которая существенным образом участвует в процессе образования пар.

Уже при температурах $T \sim mc^2$ число образовавшихся (в единице объема) электронных пар очень велико по сравнению с атомной электронной плотностью (см. примечание на следующей странице). Поэтому можно с достаточной точностью считать, что число электронов равно числу позитронов. Тогда $\mu^- = \mu^+$, и условие (105,1) дает: $\mu^- = \mu^+ = 0$, т. е. в равновесии химические потенциалы электронов и позитронов должны быть равны нулю.

---

[1]) Энергия $mc^2 = 0{,}51 \cdot 10^6$ *эв*, так что температура $mc^2/k = 6 \cdot 10^9$ *град*.

Электроны и позитроны подчиняются статистике Ферми; поэтому их число получится интегрированием распределения (56,3) с $\mu = 0$:

$$N^+ = N^- = \frac{V}{\pi^2\hbar^3}\int\limits_0^\infty \frac{p^2\,dp}{e^{\varepsilon/T}+1}, \tag{105,2}$$

где ε дается релятивистским выражением $\varepsilon = c\sqrt{p^2+m^2c^2}$.

При $T \ll mc^2$ это число экспоненциально мало $[\sim\exp(-mc^2/T)]$. В обратном же случае, $T \gg mc^2$, можно положить $\varepsilon = cp$, и формула (105,2) даст

$$N^+ = N^- = \frac{V}{\pi^2}\left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \int\limits_0^\infty \frac{x^2\,dx}{e^x+1}.$$

Стоящий здесь интеграл выражается через ζ-функцию (см. сноску на стр. 191), и получается[1])

$$N^+ = N^- = \frac{3\zeta(3)}{2\pi^2}\left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 V = 0{,}183\left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 V. \tag{105,3}$$

Тем же путем найдем энергию позитронного и электронного газов:

$$E^+ = E^- = \frac{VT}{\pi^2}\left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \int\limits_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x+1} = \frac{7\pi^2T^4}{120\,(\hbar c)^3}V. \tag{105,4}$$

Эта величина составляет 7/8 от энергии черного излучения в том же объеме.

Задача

Определить равновесную плотность электронов и позитронов при $T \ll mc^2$.

Решение. С помощью выражения (46,1а) для химического потенциала (к которому следует добавить mc^2) получим

$$n^+n^- = 4\left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^3 \exp\left(-\frac{2mc^2}{T}\right),$$

где $n^- = N^-/V$, $n^+ = N^+/V$ — плотности электронов и позитронов. Если n_0 — начальная плотность электронов (в отсутствие образования пар), то $n^- = n^+ + n_0$, и мы получаем

$$n^+ = n^- - n_0 = -\frac{n_0}{2} + \left[\frac{n_0^2}{4} + \frac{1}{2\pi^3}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^6\left(\frac{T}{mc^2}\right)^3 \exp\left(-\frac{2mc^2}{T}\right)\right]^{1/2}.$$

---

[1]) При $T \sim mc^2$ объем, приходящийся на одну образовавшуюся пару, $\sim (\hbar/mc)^3$. Этот объем очень мал по сравнению с атомным объемом — кубом боровского радиуса $(\hbar^2/me^2)^3$.