нами, а уже при $\rho \sim 10^{12}$ *г/см*^{3} начинают преобладать и по создаваемому ими давлению (*F. Hund*, 1936). Здесь начинается область плотностей, в которой вещество можно рассматривать в основном как вырожденный нейтронный ферми-газ с небольшой примесью электронов и различных ядер, концентрации которых определяются условиями равновесия соответствующих ядерных реакций. Уравнение состояния вещества в этой области есть

$$P = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m_n^{8/3}} \rho^{5/3} = 5{,}5 \cdot 10^3 \rho^{5/3} \text{ } бар, \qquad (106{,}6)$$

где m_n — масса нейтрона.

Наконец, при плотностях $\rho \gg 6 \cdot 10^{15}$ *г/см*^{3} вырожденный нейтронный газ станет ультрарелятивистским, а уравнение состояния будет определяться формулой

$$P = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4} \hbar c \left(\frac{\rho}{m_n}\right)^{4/3} = 1{,}2 \cdot 10^9 \rho^{4/3} \text{ } бар. \qquad (106{,}7)$$

Следует, однако, иметь в виду, что при плотностях порядка плотности вещества ядер становятся существенными специфические ядерные силы (сильное взаимодействие нуклонов). В этой области значений плотности формула (106,7) может иметь лишь качественный смысл. При современном состоянии наших знаний о сильных взаимодействиях нельзя сделать сколько-нибудь определенных заключений и о состоянии вещества при плотностях, значительно превосходящих ядерную. Отметим лишь, что в этой области следует ожидать возникновения, наряду с нейтронами, также и других частиц. Поскольку частицы каждого рода заполняют свой отдельный ряд состояний, то превращение нейтронов в другие частицы может оказаться термодинамически выгодным вследствие уменьшения граничной энергии фермиевского распределения нейтронов.

§ 107. Равновесие тел с большой массой

Рассмотрим тело очень большой массы, части которого удерживаются вместе силами гравитационного притяжения. Реальные тела большой массы известны нам в виде звезд, непрерывно излучающих энергию и отнюдь не находящихся в состоянии теплового равновесия. Представляет, однако, принципиальный интерес рассмотрение равновесного тела большой массы. При этом мы будем пренебрегать влиянием температуры на уравнение состояния, т. е. будем рассматривать тело находящимся при абсолютном нуле («холодное» тело). Поскольку в реальных условиях температура наружной поверхности значительно ниже, чем внутренняя температура, рассмотрение тела с отличной от нуля постоянной температурой во всяком случае лишено физического смысла.

Будем далее предполагать тело невращающимся; тогда в равновесии оно будет иметь сферическую форму, и распределение плотности в нем будет центрально-симметричным.

Равновесное распределение плотности (и других термодинамических величин) в теле будет определяться следующими уравнениями. Ньютоновский гравитационный потенциал φ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho,$$

где ρ — плотность вещества, G — ньютоновская гравитационная постоянная; в центрально-симметричном случае имеем

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = 4\pi G\rho. \tag{107,1}$$

Кроме того, в тепловом равновесии должно выполняться условие (25,2); в гравитационном поле потенциальная энергия частицы с массой m' есть $m'\varphi$, так что имеем

$$\mu + m'\varphi = \text{const}, \tag{107,2}$$

где m' — масса частицы тела, а у химического потенциала вещества в отсутствие поля для краткости опущен индекс нуль. Выразив φ через μ из (107,2) и подставив в уравнение (107,1), мы можем написать последнее в виде

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\mu}{dr}\right) = -4\pi m' G\rho. \tag{107,3}$$

При увеличении массы гравитирующего тела возрастает, естественно, и его средняя плотность (это обстоятельство будет подтверждено следующими ниже вычислениями). Поэтому при достаточно большой полной массе M тела можно, согласно изложенному в предыдущем параграфе, рассматривать вещество тела как вырожденный электронный ферми-газ — сначала нерелятивистский, а затем, при еще бо́льших массах, релятивистский.

Химический потенциал нерелятивистского вырожденного электронного газа связан с плотностью тела ρ равенством

$$\mu = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{2}\frac{\hbar^2}{m_e m'^{2/3}}\rho^{2/3} \tag{107,4}$$

(формула (57,3), в которую подставлено $\rho = m'N/V$; m' — масса, приходящаяся на один электрон, m_e — электронная масса). Выразив отсюда ρ через μ и подставив в (107,3), получим следующее уравнение[1]:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\mu}{dr}\right) = -\lambda\mu^{3/2}, \quad \lambda = \frac{2^{7/2}m_e^{3/2}m'^2 G}{3\pi\hbar^3}. \tag{107,5}$$

[1]) Легко видеть, что для электрически нейтрального газа, состоящего из электронов и атомных ядер, условие равновесия можно писать в виде (107,2)

Обладающие физическим смыслом решения этого уравнения не должны иметь особенности в начале координат: $\mu \to \text{const}$ при $r \to 0$. Это требование автоматически приводит к условию для первой производной

$$\frac{d\mu}{dr} = 0 \quad \text{при} \quad r = 0, \tag{107,6}$$

как это непосредственно следует из уравнения (107,5) после интегрирования по dr:

$$\frac{d\mu}{dr} = -\frac{\lambda}{r^2} \int_0^r r^2 \mu^{3/2}\, dr.$$

Ряд существенных результатов можно получить уже путем применения к уравнению (107,5) простых соображений размерности. Решения уравнения (107,5) содержат лишь два постоянных параметра — постоянную λ и, например, радиус тела R, заданием которого однозначно определяется выбор решения. Из этих двух величин можно образовать всего одну величину с размерностью длины — самый радиус R, и одну величину с размерностью энергии: $1/\lambda^2 R^4$ (постоянная λ имеет размерность $см^{-2} \cdot эрг^{-1/2}$). Поэтому ясно, что функция $\mu(r)$ должна иметь вид

$$\mu(r) = \frac{1}{\lambda^2 R^4} f\left(\frac{r}{R}\right), \tag{107,7}$$

где f — некоторая функция только от безразмерного отношения r/R. Поскольку плотность ρ пропорциональна $\mu^{3/2}$, то распределение плотности должно иметь вид

$$\rho(r) = \frac{\text{const}}{R^6} F\left(\frac{r}{R}\right).$$

с химическим потенциалом электронов в качестве μ и с массой, приходящейся на один электрон, в качестве m'. Действительно, вывод этого условия равновесия (§ 25) связан с рассмотрением переноса бесконечно малого количества вещества из одного места в другое. Но в газе, состоящем из заряженных частиц обоих знаков, такой перенос надо представлять себе как перенос некоторого количества нейтрального вещества (т. е. электронов и ядер вместе). Разъединение зарядов обоих знаков энергетически весьма невыгодно благодаря возникающим при этом очень большим электрическим полям. Поэтому мы получим условие равновесия в виде

$$\mu_{яд} + Z\mu_{эл} + (m_{яд} + Zm_{эл})\,\varphi = 0$$

(на одно ядро приходится Z электронов). Вследствие большой массы ядер (по сравнению с массой электронов) их химический потенциал очень мал по сравнению с $\mu_{эл}$. Пренебрегая $\mu_{яд}$ и разделив уравнение на Z, получим

$$\mu_{эл} + m'\varphi = 0.$$

Как и в § 106, при численных оценках в этом параграфе будем полагать m' равной удвоенной массе нуклона ($m' = 2m_n$).

Таким образом, при изменении размеров сферы распределение плотности в ней меняется подобным образом, причем в подобных точках плотность меняется обратно пропорционально R^6. В частности, средняя плотность сферы будет просто обратно пропорциональна R^6:

$$\bar{\rho} \backsim \frac{1}{R^6}.$$

Полная же масса M тела, следовательно, обратно пропорциональна кубу радиуса:

$$M \backsim \frac{1}{R^3}.$$

Эти два соотношения можно написать также в виде

$$R \backsim M^{-1/3}, \quad \bar{\rho} \backsim M^2. \qquad (107,8)$$

Таким образом, размеры равновесной сферы обратно пропорциональны кубическому корню из ее полной массы, а средняя плотность пропорциональна квадрату массы. Последнее обстоятельство подтверждает сделанное выше предположение о том, что плотность гравитирующего тела растет с увеличением его массы.

Тот факт, что гравитирующая сфера из нерелятивистского вырожденного ферми-газа может находиться в равновесии при любом значении полной массы M, можно было усмотреть заранее из следующих качественных соображений. Полная кинетическая энергия частиц такого газа пропорциональна $N(N/V)^{2/3}$ (см. (57,6)), или, что то же, $M^{5/3}/R^2$, а гравитационная энергия газа в целом отрицательна и пропорциональна M^2/R. Сумма двух выражений такого типа может иметь минимум (как функция от R) при любом M, причем в точке минимума $R \backsim M^{-1/3}$.

Подставляя (107,7) в (107,5) и вводя безразмерную переменную $\xi = r/R$, найдем, что функция $f(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{df}{d\xi}\right) = -f^{3/2} \qquad (107,9)$$

с граничными условиями $f'(0) = 0$, $f(1) = 0$. Это уравнение не может быть решено в аналитическом виде и должно интегрироваться численно. Укажем, что

$$f(0) = 178,2, \quad f'(1) = -132,4.$$

С помощью этих численных значений легко определить значение постоянной MR^3. Умножив уравнение (107,1) на $r^2\,dr$ и интегрируя от 0 до R, получим

$$GM = R^2\frac{d\varphi}{dr}\bigg|_{r=R} = -\frac{R^2}{m'}\frac{d\mu}{dr}\bigg|_{r=R} = -\frac{f'(1)}{m'\lambda^2 R^3},$$

откуда

$$MR^3 = 91{,}9\frac{\hbar^6}{G^3 m_e^3 m'^5} = 2{,}2\cdot 10^{13}\left(\frac{m_n}{m'}\right)^5 \odot\, км^3, \qquad (107{,}10)$$

где $\odot = 2\cdot 10^{33}$ *г* — масса Солнца. Наконец, для отношения центральной плотности $\rho(0)$ к средней плотности $\bar\rho = 3M/4\pi R^3$ легко найти

$$\frac{\rho(0)}{\bar\rho} = -\frac{f^{3/2}(0)}{3f'(1)} = 5{,}99. \qquad (107{,}11)$$

На рис. 50 (кривая *1*) изображен график отношения $\rho(r)/\rho(0)$ как функции r/R [1]).

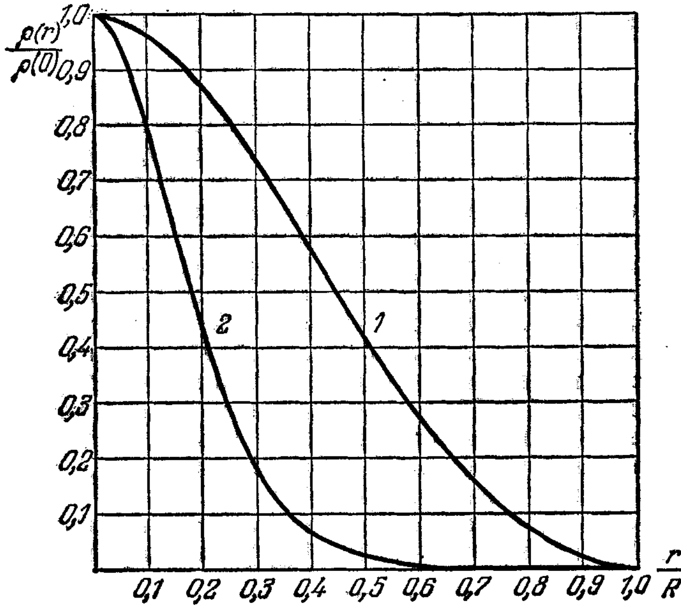

Рис. 50.

Перейдем к исследованию равновесия сферы, состоящей из вырожденного ультрарелятивистского электронного газа. Полная кинетическая энергия частиц такого газа пропорциональна $N(N/V)^{1/3}$ (см. (61,3)), или иначе $M^{4/3}/R$; гравитационная же энергия про-

[1]) В предыдущем параграфе мы видели, что вещество можно рассматривать как нерелятивистский вырожденный электронный газ при плотностях $\rho \gg 20Z^2$ *г/см*^{3}. Если потребовать выполнения этого неравенства для средней плотности рассматриваемой сферы, то для ее массы получится условие

$$M \gg 5\cdot 10^{-3} Z\odot,$$

Этим массам соответствуют радиусы $< 5\cdot 10^4 Z^{-1/3}$ *км*.

порциональна — M^2/R. Таким образом, обе эти величины зависят от R одинаковым образом, и их сумма тоже будет иметь вид $\mathrm{const}\cdot R^{-1}$. Отсюда следует, что тело вообще не сможет находиться в равновесии: если $\mathrm{const} > 0$, то оно будет стремиться расширяться (до тех пор, пока газ не станет нерелятивистским); если же $\mathrm{const} < 0$, то уменьшению полной энергии будет соответствовать стремление R к нулю, т. е. тело будет неограниченно сжиматься. Лишь в особом случае $\mathrm{const} = 0$ тело может находиться в равновесии, причем в безразличном равновесии с произвольными размерами R.

Эти качественные соображения, разумеется, полностью подтверждаются точным количественным анализом. Химический потенциал рассматриваемого релятивистского газа связан с плотностью (см. (61,2)) посредством

$$\mu = (3\pi^2)^{1/3}\hbar c\left(\frac{\rho}{m'}\right)^{1/3}. \tag{107,12}$$

Вместо уравнения (107,5) получаем теперь

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\mu}{dr}\right) = -\lambda\mu^3, \quad \lambda = \frac{4Gm'^2}{3\pi c^3\hbar^3}. \tag{107,13}$$

Имея в виду, что λ обладает теперь размерностью *эрг*$^{-2}\cdot$*см*$^{-2}$, находим, что химический потенциал как функция от r должен иметь вид

$$\mu(r) = \frac{1}{R\sqrt{\lambda}}f\left(\frac{r}{R}\right), \tag{107,14}$$

а распределение плотности

$$\rho(r) = \frac{\mathrm{const}}{R^3}F\left(\frac{r}{R}\right).$$

Таким образом, средняя плотность будет теперь обратно пропорциональна R^3, а полная масса $M \backsim R^3\bar{\rho}$ оказывается не зависящей от размеров постоянной:

$$\bar{\rho} \backsim \frac{1}{R^3}, \quad M = \mathrm{const} \equiv M_0. \tag{107,15}$$

M_0 есть единственное значение массы, при котором возможно равновесие; при $M > M_0$ тело будет стремиться неограниченно сжиматься, а при $M < M_0$ оно будет расширяться.

Для точного вычисления «критической массы» M_0 необходимо произвести численное интегрирование уравнения

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{df}{d\xi}\right) = -f^3, \quad f'(0) = 0, \quad f(1) = 0, \tag{107,16}$$

которому удовлетворяет функция $f(\xi)$ в (107,14). Теперь получается

$$f(0)=6{,}897, \qquad f'(1)=-2{,}018.$$

Для полной массы находим

$$GM_0 = R^2 \frac{d\varphi}{dr}\Big|_{r=R} = -\frac{f'(1)}{m'\sqrt{\lambda}},$$

откуда

$$M_0 = \frac{3{,}1}{m'^2}\left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2} = 5{,}8\left(\frac{m_n}{m'}\right)^2 \odot. \qquad (107{,}17)$$

Положив $m'=2m_n$, получим $M_0=1{,}45\,\odot$. Наконец, отношение центральной плотности к средней оказывается равным

$$\frac{\rho(0)}{\bar{\rho}} = -\frac{f^3(0)}{3f'(1)} = 54{,}2.$$

На рис. 50 (кривая *2*) дан график $\rho(r)/\rho(0)$ в ультрарелятивистском случае как функции r/R [1]).

Полученные результаты о зависимости между массой и радиусом равновесного «холодного» сферического тела можно представить во всей области измерения R в виде единой кривой, определяющей зависимость $M=M(R)$. При больших R (и соответственно малых плотностях тела) электронный газ можно рассматривать как нерелятивистский, и функция $M(R)$ спадает по закону $M \propto R^{-3}$. При достаточно же малых R плотность настолько велика, что имеет место ультрарелятивистский случай, и функция $M(R)$ имеет почти постоянное (равное M_0) значение (строго говоря, $M(R) \to M_0$ при $R \to 0$). На рис. 51 изображена кривая $M=M(R)$, вычисленная с $m'=2m_n$ [2]). Следует обратить внимание на то, что предельное значение $1{,}45\,\odot$ достигается лишь весьма постепенно; это связано с тем, что плотность быстро падает по мере удаления от центра тела; поэтому газ может быть уже ультрарелятивистским вблизи центра и в то же время нерелятивистским в значительной части объема тела. Отметим также, что начальная часть кривой (слишком малые R) не имеет реального физического смысла. Действительно, при достаточно малых радиусах плотность станет настолько большой, что в веществе начнут происходить ядерные реакции. При этом давление будет возрастать с увели-

---

[1]) Формальная задача о равновесии гравитирующей газовой сферы со степенной зависимостью P от ρ была исследована *Эмденом* (*R. Emden*, 1907). Физическое заключение о существовании и величине (107,17) предельной массы было впервые сделано *Л. Д. Ландау* (1932).

[2]) Построение промежуточной части кривой производится путем численного интегрирования уравнения (107,3) с точным релятивистским уравнением состояния вырожденного газа (см. задачу 3 к § 61).

чением плотности медленнее чем $\rho^{4/3}$, а при таком уравнении состояния никакое равновесие вообще невозможно[1]).

Наконец, эта кривая теряет смысл также и при слишком больших значениях R (и малых M); как уже было указано (см. примечание на стр. 352), в этой области становится неприменимым использованное нами уравнение состояния вещества. В этой связи следует указать, что существует верхний предел размеров, которыми вообще может обладать «холодное» тело. Действительно,

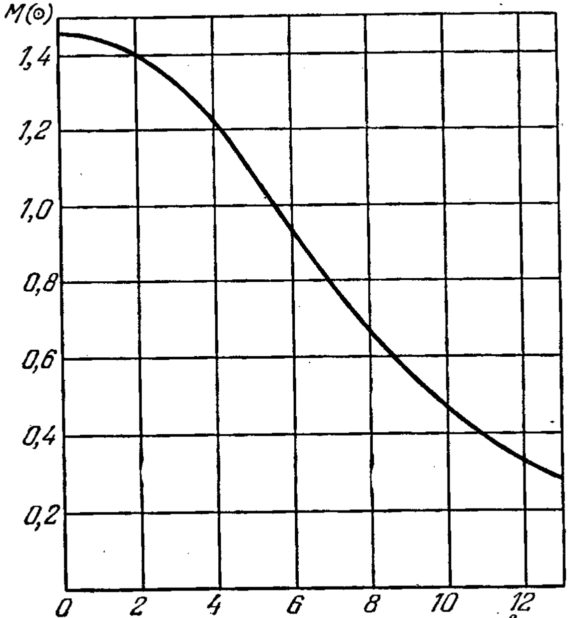

Рис. 51.

большим размерам тела соответствуют на кривой рис. 51 малые массы и малая плотность вещества. Но при достаточно малых плотностях вещество будет находиться в обычном «атомном» состоянии, и при интересующих нас низких температурах оно будет твердым. Размеры тела, построенного из такого вещества, будут, очевидно, уменьшаться при дальнейшем уменьшении его массы,

---

[1]) Если химический потенциал пропорционален некоторой степени плотности $\mu \backsim \rho^n$ (и соответственно $P \backsim \rho^{n+1}$), то внутренняя энергия тела пропорциональна $V\rho^{n+1}$, или иначе M^{n+1}/R^{3n}; гравитационная же энергия по-прежнему пропорциональна — M^2/R. Легко видеть, что при $n < 1/3$ сумма двух таких выражений, как функция от R, хотя и имеет экстремум, но этот экстремум является ее максимумом, а не минимумом.

а не увеличиваться, как на рис. 51. Истинная кривая $R = R(M)$ должна, следовательно, иметь при некотором значении M максимум.

Порядок величины максимального значения радиуса легко определить, заметив, что он должен соответствовать плотности, при которой становится существенным взаимодействие электронов с ядрами, т. е. при

$$\rho \sim \left(\frac{m_e e^2}{\hbar^2}\right)^3 m' Z^2$$

(см. (106,1)). Комбинируя это соотношение с равенством (107,10), получим

$$R_{\max} \sim \frac{\hbar^2}{G^{1/2} e m_e m' Z^{1/3}} \sim 10^5 \frac{m_n}{m' Z^{1/3}} \text{ км}. \qquad (107,18)$$

§ 108. Энергия гравитирующего тела

Гравитационная потенциальная энергия тела $E_{\text{гр}}$ определяется, как известно, интегралом

$$E_{\text{гр}} = \frac{1}{2} \int \rho\varphi \, dV, \qquad (108,1)$$

взятым по всему объему тела. Нам, однако, будет удобнее исходить из другого представления этой величины, которое можно получить следующим образом. Представим себе, что тело постепенно «составляется» из вещества, «приносимого» из бесконечности. Пусть $M(r)$ есть масса вещества, заключенного внутри сферы радиуса r. Предположим, что масса $M(r)$ с некоторым определенным r уже принесена из бесконечности; тогда работа, необходимая для доставления дополнительной массы $dM(r)$, равна потенциальной энергии этой массы (распределенной в виде шарового слоя радиуса r и толщины dr) в поле массы $M(r)$, т. е.

$$-\frac{GM(r)\,dM(r)}{r}.$$

Поэтому полная гравитационная энергия сферы радиуса R есть

$$E_{\text{гр}} = -G \int \frac{M(r)\,dM(r)}{r}. \qquad (108,2)$$

Продифференцировав условие равновесия (107,2), получим

$$v\frac{dP}{dr} + m'\frac{d\varphi}{dr} = 0$$

(дифференцирование должно производиться при постоянной температуре, $(\partial\mu/\partial P)_T = v$ — объем, отнесенный к одной частице). Производная $-d\varphi/dr$ есть сила тяготения, действующая на единицу