а не увеличиваться, как на рис. 51. Истинная кривая $R=R(M)$ должна, следовательно, иметь при некотором значении M максимум.

Порядок величины максимального значения радиуса легко определить, заметив, что он должен соответствовать плотности, при которой становится существенным взаимодействие электронов с ядрами, т. е. при

$$\rho \sim \left(\frac{m_e e^2}{\hbar^2}\right)^3 m' Z^2$$

(см. (106,1)). Комбинируя это соотношение с равенством (107,10), получим

$$R_{\max} \sim \frac{\hbar^2}{G^{1/2} e m_e m' Z^{1/3}} \sim 10^5 \frac{m_n}{m' Z^{1/3}} \text{ км}. \qquad (107,18)$$

§ 108. Энергия гравитирующего тела

Гравитационная потенциальная энергия тела $E_{\text{гр}}$ определяется, как известно, интегралом

$$E_{\text{гр}} = \frac{1}{2} \int \rho \varphi \, dV, \qquad (108,1)$$

взятым по всему объему тела. Нам, однако, будет удобнее исходить из другого представления этой величины, которое можно получить следующим образом. Представим себе, что тело постепенно «составляется» из вещества, «приносимого» из бесконечности. Пусть $M(r)$ есть масса вещества, заключенного внутри сферы радиуса r. Предположим, что масса $M(r)$ с некоторым определенным r уже принесена из бесконечности; тогда работа, необходимая для доставления дополнительной массы $dM(r)$, равна потенциальной энергии этой массы (распределенной в виде шарового слоя радиуса r и толщины dr) в поле массы $M(r)$, т. е.

$$-\frac{GM(r)\,dM(r)}{r}.$$

Поэтому полная гравитационная энергия сферы радиуса R есть

$$E_{\text{гр}} = -G \int \frac{M(r)\,dM(r)}{r}. \qquad (108,2)$$

Продифференцировав условие равновесия (107,2), получим

$$v \frac{dP}{dr} + m' \frac{d\varphi}{dr} = 0$$

(дифференцирование должно производиться при постоянной температуре, $(\partial\mu/\partial P)_T = v$ — объем, отнесенный к одной частице). Производная $-d\varphi/dr$ есть сила тяготения, действующая на единицу массы на расстоянии r от центра; она равна $-GM(r)/r^2$. Вводя также плотность $\rho = m'/v$, получаем

$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}. \qquad (108,3)$$

Выразив отсюда $GM(r)/r$ через dP/dr и написав $dM(r) = \rho(r)\cdot 4\pi r^2 dr$, представим выражение (108,2) в виде

$$E_{\text{гр}} = 4\pi \int_0^R r^3 \frac{dP}{dr}\, dr.$$

Интегрируя теперь по частям (и учитывая, что на границе тела $P(R) = 0$ и что $r^3 P \to 0$ при $r \to 0$), получим

$$E_{\text{гр}} = -12\pi \int_0^R P r^2\, dr = -3\int P\, dV. \qquad (108,4)$$

Таким образом, гравитационная энергия равновесного тела может быть выражена в виде интеграла от его давления по объему.

Применим эту формулу к рассмотренным в предыдущем параграфе телам из вырожденного ферми-газа. При этом произведем вычисления в общем виде, положив, что химический потенциал вещества пропорционален некоторой степени его плотности:

$$\mu = K\rho^{1/n}. \qquad (108,5)$$

Имея в виду, что $d\mu = v\,dP = \frac{m'}{\rho}dP$, находим давление

$$P = \frac{K}{(n+1)\,m'}\rho^{1+1/n}. \qquad (108,6)$$

В условии равновесия $(\mu/m') + \varphi = \text{const}$ постоянная в правой стороне равенства есть не что иное, как потенциал на границе тела, где μ обращается в нуль; этот потенциал равен $-GM/R$ ($M = M(R)$ — полная масса тела), так что можно написать:

$$\varphi = -\frac{\mu}{m'} - \frac{GM}{R}.$$

Подставляем это выражение в интеграл (108,1), определяющий гравитационную энергию, и, воспользовавшись формулами (108, 5—6), находим

$$E_{\text{гр}} = -\frac{1}{2m'}\int \mu\rho\, dV - \frac{GM}{2R}\int \rho\, dV = -\frac{n+1}{2}\int P\, dV - \frac{GM^2}{2R}.$$

Наконец, выразив интеграл в правой части равенства через $E_{\text{гр}}$, согласно (108,4), получим

$$E_{\text{гр}} = -\frac{3}{5-n}\frac{GM^2}{R}. \qquad (108,7)$$

Таким образом, гравитационная энергия тела выражается простой формулой через его полную массу и радиус.

Аналогичную формулу можно получить и для внутренней энергии тела E. Внутренняя энергия, отнесенная к одной частице, равна $\mu - Pv$ (при равной нулю температуре и энтропии); поэтому энергия, отнесенная к единице объема, есть

$$\frac{1}{v}(\mu - Pv) = \frac{\rho\mu}{m'} - P = nP$$

(в последнем равенстве использованы (108, 5—6)). Поэтому внутренняя энергия всего тела

$$E = n\int P\,dV = -\frac{n}{3}E_{\text{гр}} = \frac{n}{5-n}\frac{GM^2}{R}. \qquad (108,8)$$

Наконец, полная энергия тела

$$E_{\text{полн}} = E + E_{\text{гр}} = -\frac{3-n}{5-n}\frac{GM^2}{R}. \qquad (108,9)$$

Для нерелятивистского вырожденного газа имеем $n = 3/2$, так что[1])

$$E_{\text{гр}} = -\frac{6}{7}\frac{GM^2}{R}, \quad E = \frac{3}{7}\frac{GM^2}{R}, \quad E_{\text{полн}} = -\frac{3}{7}\frac{GM^2}{R}. \qquad (108,10)$$

В ультрарелятивистском же случае имеем $n = 3$, так что

$$E_{\text{гр}} = -E = -\frac{3}{2}\frac{GM^2}{R}, \quad E_{\text{полн}} = 0. \qquad (108,11)$$

Полная энергия равна в этом случае нулю в соответствии с изложенными в предыдущем параграфе качественными соображениями о равновесии такого тела [2]).

§ 109. Равновесие нейтронной сферы

Для тела с большой массой существуют две возможности равновесного состояния. Одна из них соответствует электронно-ядерному состоянию вещества, как это предполагалось при численных оценках в § 107. Другая же соответствует нейтронному состоянию вещества, в котором почти все электроны захвачены протонами и вещество можно рассматривать как нейтронный газ. При достаточно

---

[1]) Заметим, что в этом случае $2E = -E_{\text{гр}}$ в соответствии с известной из механики теоремой вириала, примененной к системе частиц, взаимодействующих по закону Ньютона (см. I, § 10)

[2]) Напомним, во избежание недоразумений, что релятивистская внутренняя энергия E (а с нею и $E_{\text{полн}}$ в (108,11)) включает в себя также и энергию покоя частиц (создающих давление P). Если же определить $E_{\text{полн}}$ как «энергию связи» тела (отсчитываемую от энергии вещества, рассеянного по пространству), то энергия покоя частиц должна быть вычтена из нее.