Таким образом, гравитационная энергия тела выражается простой формулой через его полную массу и радиус.

Аналогичную формулу можно получить и для внутренней энергии тела E. Внутренняя энергия, отнесенная к одной частице, равна $\mu - Pv$ (при равной нулю температуре и энтропии); поэтому энергия, отнесенная к единице объема, есть

$$\frac{1}{v}(\mu - Pv) = \frac{\rho\mu}{m'} - P = nP$$

(в последнем равенстве использованы (108, 5—6)). Поэтому внутренняя энергия всего тела

$$E = n\int P\,dV = -\frac{n}{3}E_{\text{гр}} = \frac{n}{5-n}\frac{GM^2}{R}. \tag{108,8}$$

Наконец, полная энергия тела

$$E_{\text{полн}} = E + E_{\text{гр}} = -\frac{3-n}{5-n}\frac{GM^2}{R}. \tag{108,9}$$

Для нерелятивистского вырожденного газа имеем $n = 3/2$, так что [1])

$$E_{\text{гр}} = -\frac{6}{7}\frac{GM^2}{R}, \quad E = \frac{3}{7}\frac{GM^2}{R}, \quad E_{\text{полн}} = -\frac{3}{7}\frac{GM^2}{R}. \tag{108,10}$$

В ультрарелятивистском же случае имеем $n = 3$, так что

$$E_{\text{гр}} = -E = -\frac{3}{2}\frac{GM^2}{R}, \quad E_{\text{полн}} = 0. \tag{108,11}$$

Полная энергия равна в этом случае нулю в соответствии с изложенными в предыдущем параграфе качественными соображениями о равновесии такого тела [2]).

§ 109. Равновесие нейтронной сферы

Для тела с большой массой существуют две возможности равновесного состояния. Одна из них соответствует электронно-ядерному состоянию вещества, как это предполагалось при численных оценках в § 107. Другая же соответствует нейтронному состоянию вещества, в котором почти все электроны захвачены протонами и вещество можно рассматривать как нейтронный газ. При достаточно

[1]) Заметим, что в этом случае $2E = -E_{\text{гр}}$ в соответствии с известной из механики теоремой вириала, примененной к системе частиц, взаимодействующих по закону Ньютона (см. I, § 10)

[2]) Напомним, во избежание недоразумений, что релятивистская внутренняя энергия E (а с нею и $E_{\text{полн}}$ в (108,11)) включает в себя также и энергию покоя частиц (создающих давление P). Если же определить $E_{\text{полн}}$ как «энергию связи» тела (отсчитываемую от энергии вещества, рассеянного по пространству), то энергия покоя частиц должна быть вычтена из нее.

больших массах тела вторая возможность во всяком случае должна стать термодинамически более выгодной, чем первая (*W. Baade*, *F. Zwicky*, 1934). Хотя превращение ядер и электронов в свободные нейтроны и связано со значительной затратой энергии, но при достаточно большой полной массе тела эта затрата будет с избытком компенсирована освобождением гравитационной энергии, связанным с уменьшением размеров и увеличением плотности тела.

Прежде всего исследуем вопрос о том, при каких условиях нейтронное состояние тела вообще может соответствовать какому бы то ни было термодинамическому равновесию (хотя бы и метастабильному). Для этого исходим из условия равновесия $\mu + m_n\varphi = \text{const}$, где μ — химический потенциал (термодинамический потенциал, отнесенный к одному нейтрону), m_n — масса нейтрона, φ — гравитационный потенциал.

Поскольку на границе тела давление должно быть равно нулю, ясно, что в некотором внешнем слое вещество будет иметь небольшие давление и плотность и, следовательно, будет находиться в электронно-ядерном состоянии. Хотя толщина такой «оболочки» и может оказаться сравнимой с радиусом внутреннего плотного нейтронного «ядра», тем не менее благодаря значительно меньшей плотности этого слоя его полную массу можно считать малой по сравнению с массой ядра[1]).

Сравним значения $\mu + m_n\varphi$ в двух местах: в плотном ядре вблизи его границы и вблизи внешней границы оболочки. Гравитационный потенциал в этих точках можно считать равным $-GM/R$ и $-GM/R'$, где R и R' — радиусы ядра и оболочки, а M — масса ядра, совпадающая в нашем приближении с полной массой тела. Что касается химического потенциала, то он в обоих случаях определяется в основном внутренней энергией (энергией связи) соответствующих частиц, большой по сравнению с их тепловой энергией. Поэтому разность обоих химических потенциалов можно положить равной просто разности приходящейся на единицу атомного веса энергии покоя нейтрального атома (т. е. ядра и Z электронов) и энергии покоя нейтрона; обозначим эту величину посредством Δ. Таким образом, приравнивая значения $\mu + m_n\varphi$ в двух рассматриваемых местах, получим

$$m_n MG\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) = \Delta.$$

Отсюда видно, что, каким бы ни был радиус R', масса и радиус нейтронного ядра должны удовлетворять неравенству

$$\frac{m_n MG}{R} > \Delta. \qquad (109,1)$$

[1]) Разумеется, никакой резкой границы между «ядром» и «оболочкой» нет, и переход между ними совершается непрерывным образом.

С другой стороны, применив результаты § 107 к сферическому телу, состоящему из вырожденного (нерелятивистского) нейтронного газа, мы найдем, что M и R связаны друг с другом соотношением

$$MR^3 = 91{,}9\frac{\hbar^6}{G^3 m_n^8} = 3{,}6\cdot 10^3 \odot км^3 \qquad (109{,}2)$$

(формула (107,10), в которой надо заменить m_e и m' на m_n). Выразив отсюда M через R и подставив в (109,1), получим неравенство для M. Численно оно дает

$$M > \sim 0{,}2\odot.$$

Так, взяв значение Δ для кислорода, получим $M > 0{,}17\odot$, для железа $M > 0{,}18\odot$. Таким массам соответствуют радиусы $R < 26\,км$ [1]).

Полученное неравенство определяет нижний предел масс, за которым нейтронное состояние тела вообще не может быть устойчивым. Однако оно еще не обеспечивает полной устойчивости состояния, которое может оказаться метастабильным. Для определения границы метастабильности надо сравнить полные энергии тела в обоих состояниях: нейтронном и электронно-ядерном. С одной стороны, переход всей массы M из электронно-ядерного состояния в нейтронное требует затраты энергии

$$\frac{M}{m_n}\Delta$$

для компенсации энергии связи ядер. С другой стороны, при этом произойдет освобождение энергии за счет сжатия тела; согласно формуле (108,10) этот выигрыш в энергии равен

$$\frac{3GM^2}{7}\left(\frac{1}{R_n}-\frac{1}{R_e}\right),$$

где R_n — радиус тела в нейтронном состоянии, определяемый формулой (109,2), а R_e — радиус тела в электронно-ядерном состоянии, определяемый формулой (107,10). Поскольку $R_e \gg R_n$, то величиной $1/R_e$ можно пренебречь, и мы получаем следующее условие, обеспечивающее полную устойчивость нейтронного состояния тела (индекс у R_n опускаем):

$$\frac{3GMm_n}{7R} > \Delta. \qquad (109{,}3)$$

Сравнивая это условие с условием (109,1) и учитывая (109,2), мы видим, что определяемый неравенством (109,3) нижний предел массы в $(7/3)^{3/4} = 1{,}89$ раз выше, чем получающийся из (109,2).

[1]) Подчеркнем, что численным оценкам в этом параграфе, основанным на простых предположениях о структуре тела, не следует придавать слишком буквальный астрофизический смысл.

Численно граница метастабильности нейтронного состояния лежит, таким образом, при массе

$$M \approx 1/3 \odot$$

(и радиусе $R \approx 22$ *км*)[1].

Перейдем к вопросу о верхнем пределе значений массы, при которых нейтронное тело может находиться в равновесии. Если мы применили бы результаты § 107 (формулу (107,17) с m_n вместо m'), то мы получили бы для этого предела значение $6 \odot$.

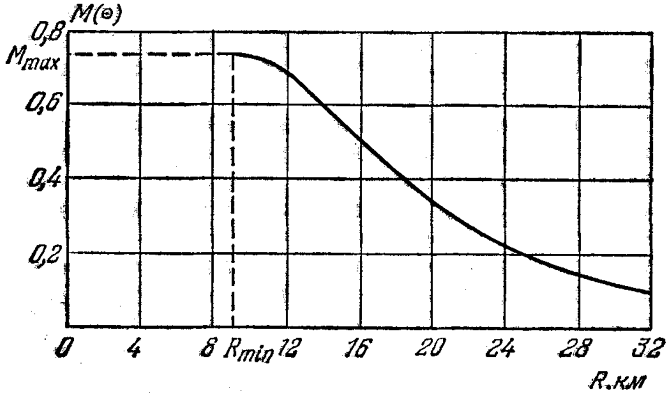

Рис. 52.

В действительности, однако, эти результаты неприменимы к данному случаю по следующей причине. В релятивистском нейтронном газе кинетическая энергия частиц порядка величины (или больше) энергии покоя, а гравитационный потенциал $\varphi \sim c^2$ [2]). Ввиду этого становится незаконным применение ньютоновской теории тяготения, и вычисления должны производиться на основе общей теории относительности. При этом, как мы увидим ниже, оказывается, что ультрарелятивистский случай вообще не достигается; поэтому вычисления должны производиться с помощью точного уравнения состояния вырожденного ферми-газа (см. задачу 3 к § 61).

Вычисления производятся путем численного интегрирования уравнений центрально-симметрического статического гравитационного поля и приводят к следующим результатам[3].

---

[1]) Средняя плотность тела при этом равна $1{,}4 \cdot 10^{13}$ *г/см*^{3}, так что нейтронный газ действительно еще можно считать нерелятивистским, и использование применяемых нами формул еще законно.

[2]) В электронном же релятивистском газе кинетическая энергия частиц сравнима с энергией покоя электронов, но все еще мала по сравнению с энергией покоя ядер, составляющих основную массу вещества.

[3]) За подробностями вычислений отсылаем к оригинальной статье *J. R. Oppenheimer, G. M. Volkoff*, Phys. Rev. 55, 374 (1939).

Предельное значение массы равновесного нейтронного шара оказывается равным всего $M_{max}=0{,}76\odot$, причем это значение достигается уже при конечном (равном $R_{min}=9{,}4$ *км*) его радиусе; на рис. 52 изображен график получающейся зависимости массы M от радиуса R. Устойчивые нейтронные сферы большей массы или меньшего радиуса, таким образом, не могут существовать. Следует указать, что под массой M мы понимаем здесь произведение $M=Nm_n$, где N — полное число частиц (нейтронов) в сфере. Эта величина не совпадает с гравитационной массой тела $M_{гр}$, определяющей создаваемое им в окружающем пространстве гравитационное поле. Благодаря «гравитационному масс-дефекту» в устойчивых состояниях всегда $M_{гр}<M$ (в частности, при $R=R_{min}$ $M_{гр}=0{,}95\,M$) [1]).

Что касается вопроса о поведении сферического тела с массой, превышающей M_{max}, то заранее ясно, что оно должно стремиться неограниченно сжиматься. Исследование характера такого неудержимого *гравитационного коллапса* изложено в другом томе этого курса (см. II, §§ 102—104).

Следует отметить, что принципиальная возможность гравитационного коллапса, неизбежного (для рассматриваемой модели сферического тела) при $M>M_{max}$, не ограничена в действительности большими массами. «Коллапсирующее» состояние существует для любой массы, но при $M<M_{max}$ оно отделено от статического равновесного состояния очень высоким энергетическим барьером [2]).

---

[1]) Точка $R=R_{min}$ на рис. 52 есть в действительности точка максимума кривой $M=M(R)$. Эта кривая продолжается за точку максимума в виде закручивающейся спирали, асимптотически приближающейся к определенному центру. Параметром, монотонно возрастающим вдоль всей кривой, является плотность в центре сферы, стремящаяся к бесконечности для сферы, соответствующей предельной точке спирали (*Н. А. Дмитриев, С. А. Холин*, 1963). Вся часть кривой при $R<R_{min}$, однако, не соответствует устойчивому состоянию сферы.

Изложение соответствующего исследования — см. *Н. А. Дмитриев, С. А. Холин*, Вопросы космогонии, т. 9, 1963; *Б. К. Гаррисон, К. С. Торн, М. Вакано, Дж. А. Уилер*, Теория гравитации и гравитационный коллапс, «Мир», 1967 (University of Chicago Press, 1965).

[2]) См. *Я. Б. Зельдович*, ЖЭТФ 42, 641 (1962).