ФЛУКТУАЦИИ

§ 110. Распределение Гаусса

Уже много раз подчеркивалось, что физические величины, характеризующие равновесное макроскопическое тело, практически всегда с очень большой точностью равны своим средним значениям. Однако, как ни малы отклонения от средних значений они все же происходят (величины, как говорят, *флуктуируют*), и возникает вопрос о нахождении распределения вероятностей этих отклонений.

Рассмотрим какую-либо замкнутую систему, и пусть x есть некоторая физическая величина, характеризующая систему в целом или какую-либо ее часть (в первом случае это, конечно, не должна быть величина, остающаяся для замкнутой системы строго постоянной, как, например, ее энергия). В дальнейшем будет удобно полагать, что среднее значение $\bar{x}$ уже вычтено из x, так что везде ниже предполагается, что $\bar{x}=0$.

Изложенные в § 7 рассуждения показали, что если рассматривать формальным образом энтропию системы как функцию от точных значений энергий подсистем, то функция e^S будет давать распределение вероятностей для этих энергий (формула (7,17)). Легко, однако, заметить, что в этих рассуждениях не были использованы какие-либо специфические свойства энергии. Поэтому такие же рассуждения приведут к результату, что вероятность величине x иметь значение в интервале между x и $x+dx$ пропорциональна $e^{S(x)}$, где $S(x)$ — энтропия, формально рассматриваемая как функция точного значения x. Обозначив вероятность посредством $w(x)\,dx$, имеем [1])

$$w(x)=\mathrm{const}\cdot e^{S(x)}. \tag{110,1}$$

Прежде чем приступить к исследованию этой формулы, остановимся на вопросе о пределах ее применимости. Все рассуждения, которые привели к формуле (110,1), неявно подразумевают

[1]) Эта формула была впервые применена к исследованию флуктуаций *А. Эйнштейном* (1910).

классичность поведения величины x[1]). Поэтому надо найти условие, допускающее пренебрежение квантовыми эффектами.

Как известно из квантовой механики, между квантовыми неопределенностями энергии и какой-либо величины x имеет место соотношение

$$\Delta E\,\Delta x \sim \hbar\dot{x},$$

где $\dot{x}$ — классическая скорость изменения величины x (см. III, § 16).

Пусть τ — время, характеризующее скорость изменения интересующей нас величины x, которая имеет неравновесное значение[2]); тогда $\dot{x} \sim x/\tau$, так что

$$\Delta E\,\Delta x \sim \frac{\hbar x}{\tau}.$$

Ясно, что говорить об определенном значении величины x можно лишь при условии малости ее квантовой неопределенности: $\Delta x \ll x$, откуда

$$\Delta E \gg \frac{\hbar}{\tau}.$$

Таким образом, квантовая неопределенность энергии должна быть велика по сравнению с $\hbar/\tau$. Энтропия же системы будет при этом иметь неопределенность

$$\Delta S \gg \frac{\hbar}{\tau T}.$$

Для того чтобы формула (110,1) имела реальный смысл, необходимо, очевидно, чтобы неточность энтропии была мала по сравнению с единицей:

$$T \gg \frac{\hbar}{\tau}, \qquad \tau \gg \frac{\hbar}{T}. \tag{110,2}$$

Это и есть искомое условие. При слишком низких температурах или при слишком быстром изменении величины x (слишком малом τ) флуктуации нельзя рассматривать термодинамически, и на первый план выступают чисто квантовые флуктуации.

---

[1]) Это не означает, конечно, что вся система должна быть классической. Другие (помимо x) относящиеся к ней величины могут иметь квантовый характер.

[2]) Время τ может не совпадать со временем релаксации для установления равновесия по величине x, а быть меньше него, если величина x приближается к $\bar{x}$, испытывая в то же время колебания. Так, если речь идет об изменении давления в небольшом участке тела (с линейными размерами $\sim a$), то τ будет порядка величины периода звуковых колебаний с длиной волны $\lambda \sim a$, т. е. $\tau \sim a/c$, где c — скорость звука.

Вернемся к формуле (110,1). Энтропия S имеет максимум при $x=\bar{x}=0$. Поэтому

$$\left.\frac{\partial S}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \quad \left.\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right|_{x=0}<0.$$

Величина x при флуктуациях очень мала. Разлагая $S(x)$ в ряд по степеням x и ограничиваясь членом второго порядка, получим

$$S(x)=S(0)-\frac{\beta}{2}x^2, \tag{110,3}$$

где β — положительная постоянная. Подставляя в (110,1), получим распределение вероятностей в виде

$$w(x)\,dx=Ae^{-\frac{\beta}{2}x^2}dx.$$

Нормировочная постоянная A определяется условием $\int w(x)\,dx=1$; хотя выражение для $w(x)$ относится к малым x, но ввиду быстрого убывания подынтегральной функции с увеличением $|x|$ область интегрирования можно распространить на все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Произведя интегрирование, получим $A=\sqrt{\beta/2\pi}$.

Таким образом, распределение вероятностей для различных значений флуктуации x определяется формулой

$$w(x)\,dx=\sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}e^{-\frac{\beta}{2}x^2}dx. \tag{110,4}$$

Распределение такого вида называется *распределением Гаусса*. Оно имеет максимум при $x=0$ и быстро спадает с увеличением $|x|$ симметрично в обе стороны.

Средний квадрат флуктуации равен

$$\langle x^2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x^2w(x)\,dx=\frac{1}{\beta}. \tag{110,5}$$

Поэтому распределение Гаусса можно написать в виде

$$w(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi\langle x^2\rangle}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\langle x^2\rangle}\right)dx. \tag{110,6}$$

Как и следовало, $w(x)$ имеет тем более острый максимум, чем меньше $\langle x^2\rangle$.

Отметим, что по известному $\langle x^2\rangle$ можно найти аналогичную величину для любой функции $\varphi(x)$. В виду малости x имеем[1]:

$$\langle(\Delta\varphi)^2\rangle=\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2_{x=0}\langle x^2\rangle. \tag{110,7}$$

[1] Подразумевается, конечно, что функция $\varphi(x)$ мало меняется на значениях $x\sim\langle x^2\rangle^{1/2}$ и что производная $d\varphi/dx$ отлична от нуля при $x=0$.