Отсюда находим для среднего квадрата

$$\langle y^2 \rangle = \frac{T}{Fl} x (l - x).$$

9. Определить среднее значение произведения флуктуационных смещений двух различных точек струны.

Решение. Пусть y_1, y_2 — поперечные смещения точек, находящихся на расстояниях x_1, x_2 от одного из концов струны (причем $x_2 > x_1$). Равновесная форма при заданных y_1 и y_2 составляется из трех прямых отрезков, и работа

$$R_{\min} = \frac{F}{2}\left(y_1^2 \frac{x_2}{x_1 (x_2 - x_1)} + y_2^2 \frac{l - x_1}{(l - x_2)(x_2 - x_1)} - 2y_1 y_2 \frac{1}{(x_2 - x_1)} \right).$$

По формуле (111,8) найдем

$$\langle y_1 y_2 \rangle = \frac{T}{Fl} x_1 (l - x_2).$$

§ 113. Флуктуации в идеальном газе

Средний квадрат флуктуации числа частиц обычного идеального газа, находящихся в некотором выделенном в газе относительно малом объеме, мы найдем, подставив в формулу (112,13) $V = NT/P$. Это дает следующий простой результат:

$$\langle (\Delta N)^2 \rangle = N. \tag{113,1}$$

Относительная флуктуация числа частиц равна, следовательно, просто обратному квадратному корню из среднего числа частиц:

$$\frac{\langle (\Delta N^2) \rangle^{1/2}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Для того чтобы вычислить флуктуацию числа частиц в идеальном газе Бозе или Ферми, следует воспользоваться формулой (112,14), подставив в нее выражение (56,5) для N как функции от μ, T, V, получаемое интегрированием соответствующей функции распределения. Мы не станем выписывать здесь получающиеся таким способом довольно громоздкие выражения. Отметим лишь следующее обстоятельство. Мы видели, что у бозе-газа при температурах $T < T_0$ (см. § 62) давление не зависит от объема; другими словами, его сжимаемость обращается в бесконечность. Согласно формуле (112,13) отсюда следовало бы, что флуктуации числа частиц тоже становятся бесконечными. Это означает, что при вычислении флуктуаций в бозе-газе при низких температурах нельзя пренебрегать взаимодействием его частиц, сколь бы слабым оно ни было; учет этого взаимодействия, которое должно существовать во всяком реальном газе, привел бы к конечным флуктуациям.

Далее рассмотрим флуктуации в распределении частиц газа по различным квантовым состояниям. Введем снова в рассмотрение квантовые состояния частиц (включая в это понятие также и различные состояния их поступательного движения), и пусть n_k — их числа заполнения.

Рассмотрим совокупность n_k частиц, находящихся в k-м квантовом состоянии; ввиду полной статистической независимости этой системы частиц от остальных частиц газа (ср. § 37) можно применить к ней формулу (112,14):

$$\langle(\Delta n_k)^2\rangle = T\frac{\partial \bar{n}_k}{\partial \mu}. \qquad (113,2)$$

В применении к ферми-газу надо подставить сюда

$$\bar{n}_k = [e^{(\varepsilon_k-\mu)/T}+1]^{-1}.$$

Произведя дифференцирование, найдем

$$\langle(\Delta n_k)^2\rangle = \bar{n}_k(1-\bar{n}_k). \qquad (113,3)$$

Аналогичным образом найдем для бозе-газа

$$\langle(\Delta n_k)^2\rangle = \bar{n}_k(1+\bar{n}_k). \qquad (113,4)$$

Для больцмановского газа при подстановке $\bar{n}_k = \exp[(\mu-\varepsilon_k)/T]$ получается, естественно, формула

$$\langle(\Delta n_k)^2\rangle = \bar{n}_k, \qquad (113,5)$$

в которую переходят как (113,3), так и (113,4) при $\bar{n}_k \ll 1$.

Просуммируем формулу (113,3) или (113,4) по группе из G_j близких друг к другу состояний, содержащих всего $N_j = \sum n_k$ частиц. В силу упомянутой уже статистической независимости флуктуаций различных n_k получим

$$\langle(\Delta N_j)^2\rangle = G_j\bar{n}_j(1\mp\bar{n}_j) = \bar{N}_j\left(1\mp\frac{\bar{N}_j}{G_j}\right), \qquad (113,6)$$

где $\bar{n}_j$ — общее значение близких друг к другу $\bar{n}_k$, а $\bar{N}_j = \bar{n}_j G_j$.

Полученные формулы можно применить, в частности, к черному излучению (равновесный бозе-газ фотонов), для чего надо положить в (113,4) $\mu = 0$. Рассмотрим совокупность квантовых состояний фотонов (в объеме V) с близкими значениями частот, лежащими в малом интервале $\Delta\omega_j$; число таких состояний равно $G_j = V\omega_j^2\Delta\omega_j/\pi^2c^3$ (см. (63,3)). Общая энергия квантов в этом интервале частот есть $E_{\Delta\omega_j} = N_j\hbar\omega_j$. Умножив формулу (113,6) на $(\hbar\omega_j)^2$ и опуская индекс j, получим следующее выражение для флуктуации энергии $E_{\Delta\omega}$ черного излучения в заданном интервале частот $\Delta\omega$ (впервые найденное *Эйнштейном*, 1909):

$$\langle(\Delta E_{\Delta\omega})^2\rangle = \hbar\omega\cdot E_{\Delta\omega} + \frac{\pi^2c^3(E_{\Delta\omega})^2}{V\omega^2\Delta\omega}. \qquad (113,7)$$

Задача

Определить $\langle(\Delta N)^2\rangle$ для электронного газа при температурах, малых по сравнению с температурой вырождения.

Решение. При вычислении $(\partial N/\partial\mu)_{T,\,V}$ можно пользоваться выражением (57,3) для μ при абсолютном нуле. Простое вычисление дает

$$\langle(\Delta N)^2\rangle = \frac{3^{1/3}mT}{\pi^{4/3}\hbar^2}\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3} V.$$

§ 114. Формула Пуассона

Зная средний квадрат флуктуации числа частиц в заданном объеме газа (113,1), можно написать соответствующее гауссово распределение вероятностей флуктуаций этого числа:

$$w(N)dN = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{N}}}\exp\left\{-\frac{(N-\overline{N})^2}{2\overline{N}}\right\}\cdot dN. \tag{114,1}$$

Эта формула, однако, применима лишь для малых флуктуаций — отклонение $N-\overline{N}$ должно быть малым по сравнению с самим числом $\overline{N}$.

Если выделенный в газе объем V достаточно мал, то число частиц в нем невелико, и представляет интерес рассмотрение также и больших флуктуаций, при которых $N-\overline{N}$ становится сравнимым с $\overline{N}$. Заметим, что этот вопрос имеет смысл лишь в применении к больцмановскому газу, так как в газах Ферми или Бозе вероятность таких флуктуаций может стать заметной лишь в настолько малых объемах, что существенными становятся квантовые флуктуации.

Решение поставленного вопроса проще всего получить следующим образом. Пусть V_0 и N_0 — полный объем газа и число частиц в нем, а V — малая по сравнению с V_0 часть объема. В силу однородности газа очевидно, что вероятность некоторой определенной частице находиться в объеме V равна просто отношению V/V_0, а вероятность одновременного нахождения в нем N определенных частиц равна $(V/V_0)^N$. Аналогично вероятность частице не находится в объеме V равна $(V_0-V)/V_0$, а такая же вероятность одновременно для N_0-N определенных частиц есть $(1-V/V_0)^{N_0-N}$. Поэтому вероятность w_N того, что в объеме V будет находиться всего N каких-либо молекул, дается выражением

$$w_N = \frac{N_0!}{N!\,(N_0-N)!}\left(\frac{V}{V_0}\right)^N\left(1-\frac{V}{V_0}\right)^{N_0-N}, \tag{114,2}$$

где введен множитель, определяющий число возможных способов выбора N из N_0 частиц.